CAPÍTULO I

MATRICES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

ESQUEMA

PRESENTACIÓN DEL CAPÍTULO 15

Introducción, 15 · Objetivos básicos, 16 · Conceptos clave más importantes, 16

1. Definición de matriz. Operaciones con matrices 17
   1. Definición de matriz 17
   2. Algunos tipos de matrices 19
   3. Matrices columna y matrices fila de una matriz 21
   4. Adición de matrices 22
   5. Multiplicación por un número de una matriz . . 25
   6. Multiplicación de matrices 26

      Ejemplos y definición, 26 · La *no* conmutatividad de la multiplicación de matrices, 30 · Productos de matrices dados por columnas o por filas, 32 · Propiedades de la multiplicación de matrices, 35

   EJERCICIOS DE LA LECCIÓN 1 38

2. Transformaciones elementales. Matrices escalonadas 40
   1. Transformaciones elementales por filas 40

      Tipos de transformaciones elementales por filas, 40 · Transformaciones elementales inversas, 42

   2. Matrices elementales 43

      Definición y ejemplos, 43 · Algunas propiedades, 46

   3. Matrices escalonadas 48

      Matriz escalonada. Pivote, 48 · Matriz escalonada reducida, 54

   EJERCICIOS DE LA LECCIÓN 2 59

3. Sistemas de ecuaciones lineales 60
   1. Sistemas de ecuaciones lineales: definiciones y propiedades 60
   2. Sistemas de ecuaciones lineales: discusión y resolución 70

      Planteamiento del método, 70 · Sistemas incompatibles, 71 · Sistemas compatibles determinados, 72 · Sistemas compatibles indeterminados, 76

   3. Sistemas homogéneos 82
   4. Ejemplos de discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales 85
   5. Dos resultados adicionales 91

      Invarianza del número de pivotes al escalonar una matriz, 91 · Unicidad de la forma escalonada reducida, 92

   EJERCICIOS DE LA LECCIÓN 3 93

4. Rango de una matriz. Inversa de una matriz cuadrada. Traspuesta de una matriz 95
   1. Rango de una matriz 95
   2. Rango y sistemas de ecuaciones lineales 101
   3. Inversa de una matriz cuadrada 106
   4. Método práctico para el cálculo de la matriz inversa 112
   5. Traspuesta de una matriz. 116

      Definición y ejemplos, 116 · Propiedades, 118

   6. Traza de una matriz cuadrada. 121

   EJERCICIOS DE LA LECCIÓN 4 126

RECAPITULACIÓN I 128

PRESENTACIÓN DEL CAPÍTULO

Introducción

El lector o lectora habrá estudiado ya matrices en Bachillerato (o equivalente), e incluso se ha encontrado con ellas, acaso someramente, en la anterior asignatura de Matemáticas del Grado; no obstante, en este capítulo las presentamos con detalle desde el principio, considerando que son desconocidas para quien lo lee. Incluimos también los sistemas de ecuaciones lineales, que se presentan estrechamente ligados a las matrices.

La primera lección presenta la definición de matriz, y nos da un primer listado de algunos tipos particulares de matrices que se utilizan en lugares diversos (matriz fila y matriz columna, matriz diagonal, matriz identidad y matriz nula). También se definen las llamadas matrices columna y matrices fila de una matriz.

Esta primera lección nos muestra asimismo las operaciones entre matrices. Las matrices son objetos matemáticos que en cierto sentido generalizan los números (de hecho —eso sí, con el debido cuidado—, un número podría verse como una matriz con un solo término). Un aspecto de esta generalización es que es posible definir operaciones entre matrices como la adición o la multiplicación por un número, con propiedades similares a las operaciones entre números. Hay una operación, sin embargo, que no puede verse como una generalización de ninguna operación entre números: nos referimos a la *multiplicación matricial*. De hecho, por ejemplo, esta multiplicación matricial no es en general conmutativa, como sí lo es la multiplicación de números reales (con números, el orden de los factores no altera el producto).

La segunda lección presenta las transformaciones elementales por filas. Se trata de manipulaciones en una matriz que se utilizarán profusamente en casi toda la materia de este libro. Se definen estas transformaciones, y se estudian conceptos relacionados con ellas, como las transformaciones elementales inversas y las matrices elementales. En la lección también se estudian las matrices escalonadas, con sus pivotes, y las matrices escalonadas reducidas, y se aprende a *escalonar* una matriz mediante transformaciones elementales.

La tercera lección está dedicada a estudiar los sistemas de ecuaciones lineales. El lector los conocerá ya, aun de Secundaria, pero aquí se presentan desde el principio, mostrando su estrecha relación con las matrices. La lección ofrece conceptos como ecuación lineal y sistemas de ecuaciones lineales, solución, sistemas equivalentes, etc; y detalla un método práctico para discutir y resolver un sistema de ecuaciones lineales. Apuntamos aquí que, dado un sistema, se distingue entre *discutirlo* —averiguar si admite solución o no, y en caso afirmativo cuántas—, y *resolverlo* —calcular efectivamente las soluciones cuando existen—. La lección incluye un apartado dedicado a los sistemas homogéneos, y termina con ejemplos de discusión y resolución de sistemas en los que figuran parámetros, es decir, variables —diferentes de las incógnitas— que pueden tomar distintos valores, según los cuales el sistema puede ser de una clase u otra, o puede tener una solución u otra.

La cuarta y última lección comienza con el importante concepto de *rango* de una matriz. La relación entre el concepto de rango y los sistemas de ecuaciones lineales es muy estrecha, y no dejamos de dedicarle un apartado. Esta lección también está dedicada al estudio de la *inversa* de una matriz cuadrada, y a la *transposición* de matrices (cualesquiera, no necesariamente cuadradas). La lección define lo que es la inversa de una matriz cuadrada, da condiciones para saber si existe o no, y enseña a calcularla cuando existe. La inversa de una matriz trata de dar respuesta a esta cuestión: dada una matriz, ¿existe otra cuyo producto por la primera sea igual a una matriz identidad? La lección asimismo nos enseña qué es la traspuesta de una matriz; y termina definiendo qué es la traza de una matriz cuadrada. Estos conceptos tienen gran utilidad en diversos lugares.

Objetivos básicos

Definir las matrices y aprender a operarlas (adición, multiplicación por un escalar, y multiplicación de matrices). Utilizar profusamente las transformaciones elementales por filas, y aplicarlas a diversos contextos; definir las matrices escalonadas (y sus pivotes) y las matrices escalonadas reducidas, y saber escalonar una matriz. Formular de forma adecuada un sistema de ecuaciones lineales, y aprender a escribirlo de forma matricial; aprender a discutir un sistema (determinar si tiene solución o no, y en caso afirmativo si tiene una o infinitas soluciones), y a resolverlo; discutir y resolver sistemas que incluyen parámetros. Definir y calcular el rango de una matriz. Saber cuándo una matriz cuadrada es invertible, y calcular su inversa en caso afirmativo; calcular la traza de una matriz cuadrada; calcular la traspuesta de una matriz cualquiera.

Conceptos clave más importantes

Definición de matriz: filas y columnas de una matriz, términos de una matriz · Tipos de matrices (fila, columna, cuadrada, diagonal, identidad, nula) · Matrices fila y matrices columna de una matriz · Adición de matrices y multiplicación por un número · Multiplicación de matrices · Transformación elemental por filas · Matriz escalonada, pivote, y matriz escalonada reducida · Forma escalonada de una matriz · Ecuación lineal · Sistema de ecuaciones lineales (coeficientes, términos independientes, soluciones, sistemas equivalentes) · Representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales (matriz de coeficientes, matriz ampliada) · Discusión de sistemas de ecuaciones lineales · Resolución de sistemas de ecuaciones lineales · Incógnitas básicas e incógnitas libres · Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales con parámetros · Rango de una matriz · Matriz de rango máximo · Inversa de una matriz cuadrada · Matriz traspuesta de una matriz · Traza de una matriz cuadrada

Lección 1
DEFINICIÓN DE MATRIZ. OPERACIONES CON MATRICES

Vemos en esta lección la definición de matriz y presentamos los primeros tipos de matrices más utilizados (matriz fila, matriz columna, matriz cuadrada —incluyendo la idea de diagonal principal—, matriz diagonal, así como matriz identidad y matriz nula). Estudiamos también las operaciones básicas con matrices: adición (y substracción), multiplicación escalar (o multiplicación por un número de una matriz) y multiplicación matricial, incluyendo algunas de sus propiedades.

1. Definición de matriz

Dedicamos este apartado a ver la definición general de matriz y a detallar la forma de denotar las matrices.

¿Qué es una matriz?

1 Dados dos números naturales positivos n y m, una **matriz** (real) de **orden** (n, m) (o de orden $n \times m$) es una disposición de $n \cdot m$ números (reales) en forma rectangular en n filas y m columnas, que son las **filas** y las **columnas** de la matriz. Los números que se escriben en una matriz se denominan **términos** de la matriz.

Un primer ejemplo

Por ejemplo, una matriz de orden $(2, 3)$ (o de orden 2×3) es una disposición en *dos* filas y en *tres* columnas de $2 \cdot 3 = 6$ números. Con la notación:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & \pi \\ 1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix},$$

estamos introduciendo una matriz concreta de orden $(2, 3)$. La estamos designando por A (las matrices se suelen denotar con letras mayúsculas), y tiene efectivamente dos filas y tres columnas.

En cualquier matriz, las filas se leen de arriba abajo y las columnas de izquierda a derecha, así que la primera fila de la matriz A es la formada por los números 2, -3 y π; o dicho más formalmente: los *términos de la primera fila* de la matriz A son 2, -3 y π. Análogamente, los términos de la segunda fila de A son 1, 0 y $1/2$; los términos de la primera columna de A son 2 y 1; los de la segunda columna, -3 y 0; y los de la tercera, π y $1/2$.

En la matriz A también observamos que, en la primera fila y en la segunda columna, por ejemplo, está situado el número -3; se dice que el **término de posición** $(1, 2)$ de la matriz A es igual a -3, y se escribe: $a_{12} = -3$. Los términos se denotan con la misma letra que designa la matriz pero en minúscula, y figurando como subíndices el número de fila y el número de columna, en este orden y sin comas. Análogamente, podemos decir que el término de posición $(2, 2)$ de la matriz A es igual a 0, y se escribe: $a_{22} = 0$. Otros términos de A son: $a_{11} = 2$, $a_{13} = \pi$ o $a_{23} = 1/2$.

Otro ejemplo

2 Consideremos la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2/3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 9 & 1 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

La matriz B es de orden $(3,4)$: tiene tres filas y cuatro columnas. Los términos de la segunda fila, por ejemplo, son 0, 2, 1 y -1; los de la tercera columna: 5, 1 y 0.

El término de posición $(2,4)$, verbigracia, es igual a -1, lo cual se escribe así: $b_{24} = -1$. También podemos escribir: $b_{31} = 9$, $b_{34} = 1/5$, o $b_{14} = 2/3$.

Notaciones para una matriz general

3 En general, una matriz A de orden (n,m) se escribe así:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Observemos que, si i es un número natural tal que $1 \leqslant i \leqslant n$, entonces los términos de la i-ésima fila de la matriz A son estos:

$$a_{i1},\ a_{i2},\ \dots,\ a_{im}.$$

Vemos, en particular, que los términos de una misma fila tienen común el *primer* subíndice.

Por otra parte, si j es un número natural tal que $1 \leqslant j \leqslant m$, los términos de la j-ésima columna son:

$$a_{1j},\ a_{2j},\ \dots,\ a_{nj}.$$

Los términos de una misma columna tienen común el *segundo* subíndice.

Nota bene El término de posición (i,j) en la matriz A es a_{ij}. ▲

Para la matriz A, también se hace uso de la notación:

$$A = \left(a_{ij};\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m\right),$$

o bien (cuando no hay riesgo de confusión): $A = \left(a_{ij}\right)$.

Igualdad de matrices

4 Dos matrices son **iguales** si son del mismo orden y sus términos correspondientes son iguales (en la misma posición, el mismo número).

Solo definimos la igualdad de dos matrices cuando ambas son del mismo orden.

Dicho más formalmente, dos matrices $A = \left(a_{ij}\right)$ y $B = \left(b_{ij}\right)$, ambas de orden (n,m), son iguales si:

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \text{para cada } 1 \leqslant i \leqslant n \text{ y cada } 1 \leqslant j \leqslant m.$$

Si las matrices A y B son iguales, escribiremos: $A = B$.

2. Algunos tipos de matrices

Este apartado presenta los primeros tipos de matrices que utilizaremos. Veremos más adelante otras clases de matrices (cf. § 176 y ss., p. 143).

Matriz fila

5 Una matriz puede tener una sola fila; de una matriz de este tipo se dice que es una **matriz fila**.

Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 34 \end{pmatrix}.$$

Estas matrices son de órdenes $(1,3)$, $(1,5)$ y $(1,2)$, respectivamente. Cualquier matriz fila tiene orden $(1,m)$ para algún número natural positivo m.

Nota bene Al anotar una matriz, no se escriben comas u otros signos para separar sus términos; solamente se deja un cierto espacio. En particular, los términos de una matriz fila se escriben separados por un espacio, sin comas entre ellos. ▲

No confundir la matriz fila

$$\begin{pmatrix} -1 & 34 \end{pmatrix}$$

con el *par ordenado* $(-1,34)$, cuyas *componentes* sí se escriben separadas por comas (cf. p. 64).

Matriz columna

6 También hay matrices con una sola columna; de una matriz así se dice que es una **matriz columna**.

Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1/2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

las cuales son de órdenes $(3,1)$, $(2,1)$ y $(4,1)$, respectivamente. Cualquier matriz columna es de orden $(n,1)$ para algún número natural positivo n.

Hay matrices que son, *simultáneamente*, una matriz fila y una matriz columna: las de orden $(1,1)$. Tienen un solo término; por ejemplo: $\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$. No debe confundirse la matriz $\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$ con el número 2.

Matriz cuadrada

7 Son de especial interés las matrices que tienen el mismo número de filas que de columnas: son las llamadas matrices *cuadradas*. Más en concreto, una **matriz cuadrada** de **orden** n es una matriz con n filas y con n columnas, es decir, una matriz de orden (n,n).

Por ejemplo, las siguientes matrices son cuadradas, de órdenes, respectivamente, 2, 3 y 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1/4 & 10 \\ 1 & 0 & e^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/3 & 2 & -2 & 5 \\ \pi^3 & 1/4 & 1 & 4 \\ 0 & 10^{-4} & 1 & \sqrt{3}/2 \\ 1 & -2/7 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Términos de la diagonal principal en una matriz cuadrada

En una matriz cuadrada de orden n, los términos de la **diagonal principal** son los que ocupan las posiciones $(1,1)$, $(2,2)$, …, (n,n). Verbigracia, en la primera de las matrices cuadradas del párrafo anterior, los términos de la diagonal principal son 1 y 1 —los de posiciones, respectivamente, $(1,1)$ y $(2,2)$—; en la segunda son 3, $1/4$ y e^2 —los de posiciones, respectivamente, $(1,1)$, $(2,2)$ y $(3,3)$—; y en la tercera, $1/3$, $1/4$, 1 y 0.

Un ejemplo de diagonal principal:

$$\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1/4 & 10 \\ 1 & 0 & e^2 \end{pmatrix}.$$

Nota bene Para una matriz cuadrada, decimos "orden n", y no "orden (n,n)". ▲

Matriz diagonal

8 De una matriz *cuadrada* que tiene nulos los términos que *no* están en la diagonal principal diremos es una **matriz diagonal**.

Por ejemplo, estas matrices son diagonales:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\pi \end{pmatrix}.$$

Nótese que, en una matriz diagonal, no se exige nada sobre los términos de la diagonal principal: pueden ser iguales a cualquier número (en particular, pueden ser nulos o no).

Matriz identidad (o unitaria)

Cuando una matriz *diagonal* presenta los términos de la diagonal principal iguales a 1, decimos de ella que es una **matriz identidad** (o **unitaria**). Para cada orden n hay una, que se denota I_n. Las de órdenes 2, 3 y 4 son, respectivamente, las siguientes:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La genérica de orden n se puede escribir así:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Letra griega δ (léase "delta").

Es frecuente designar los términos de una matriz identidad con la letra griega δ, de forma que se escribe $I_n = \left(\delta_{ij}\right)$ (si nos referimos a la de orden n). Nótese entonces que, para $i = j$, estamos en la diagonal principal de la matriz, y por tanto $\delta_{ij} = 1$; y que, para $i \neq j$, estamos fuera de la diagonal principal de la matriz, y así $\delta_{ij} = 0$. Es decir: .

Esta notación δ_{ij} para indicar los términos de una matriz identidad se denomina delta de KRONECKER

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j; \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Matriz nula (o cero)

9 Destacamos finalmente otro tipo de matriz: la matriz nula. Una matriz, del orden que sea (cuadrada o no), es una **matriz nula** (o también: una **matriz cero**) si todos sus términos son iguales al número 0. Cualquier matriz nula se denota por O. De acuerdo con la notación general para matrices vista en el § 3, podemos escribir: $\mathrm{O} = \left(0\right)$.

Por ejemplo, las siguientes matrices son nulas:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de órdenes, respectivamente, $(1,2)$, $(3,1)$, $(2,3)$ y $(2,2)$.

Nota bene En la notación de una matriz nula, no se señala —en principio— el orden de la matriz, el cual suele venir implícito por el contexto. La experiencia muestra que ello no da lugar a confusión a poca atención que se ponga. ▲

3. Matrices columna y matrices fila de una matriz

A partir de una matriz dada, se construyen con sus términos ciertas matrices columna y ciertas matrices fila que son utilizadas en varios contextos.

10 Empecemos con un ejemplo. Consideremos la siguiente matriz de orden $(3,4)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 2 & -2 & 5 \\ 3 & 1/4 & 1 & 4 \\ 1 & -2/7 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo de matrices columna de una matriz

La *primera matriz columna* de la matriz A se define como aquella matriz columna cuyos términos son los términos de la *primera* columna de A. Se denota: $\mathsf{C}_1(A)$. Los términos de la primera columna de A son $1/2$, 3 y 1, así que

$$\mathsf{C}_1(A) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 2 & -2 & 5 \\ 3 & 1/4 & 1 & 4 \\ 1 & -2/7 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Análogamente se definen la restantes matrices columna de A, hasta hacer un total de cuatro, dado que la matriz A tiene cuatro columnas:

$$\mathsf{C}_2(A) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/4 \\ -2/7 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{C}_3(A) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathsf{C}_4(A) = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Una vez definidas las matrices columna de la matriz A, se considera la llamada *notación por columnas* de A. Si A_1, A_2, A_3 y A_4 designan las cuatro matrices columna de la matriz A, la notación por columnas de A es esta:

$$A = \left(A_1 \mid A_2 \mid A_3 \mid A_4 \right).$$

11 También se consideran las *matrices fila* de una matriz, que se definen, *mutatis mutandis*, como las matrices columna. Para la matriz A con la que hemos trabajado en el § 10, su segunda matriz fila, verbigracia, que se denota por $\mathsf{F}_2(A)$, es esta:

Ejemplo de matrices fila de una matriz

$$\mathsf{F}_2(A) = \begin{pmatrix} 3 & 1/4 & 1 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 2 & -2 & 5 \\ 3 & 1/4 & 1 & 4 \\ 1 & -2/7 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

como vemos, sus términos son los de la segunda fila de A. Por supuesto, hay tantas matrices fila como filas tiene la matriz: tres en este caso.

Análogamente se considera la *notación por filas* de la matriz A: si F_1, F_2 y F_3 son las tres matrices fila de la matriz A, la notación por filas de A es:

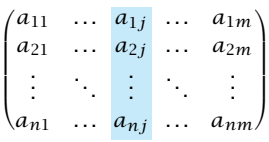
$$A = \begin{pmatrix} F_1 \\ \hline F_2 \\ \hline F_3 \end{pmatrix}.$$

12 Para ver en general estos conceptos, consideremos una matriz A de orden (n, m), que escribimos de forma que se enfatice una *columna* genérica:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Matrices columna de una matriz

Fijemos un número natural j tal que $1 \leqslant j \leqslant m$. Se define la j-ésima **matriz columna de la matriz** A, que se denota: $\mathsf{C}_j(A)$, como aquella matriz columna de orden $(n, 1)$ cuyos términos son los de la j-ésima columna de A. Es decir:



$$\mathsf{C}_j(A) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}.$$

Notación por columnas

Si $A_1, A_2, \dots, A_m$ son las m matrices columna de la matriz A, la **notación por columnas** de A es:

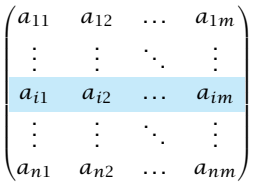
$$A = \left(A_1 \mid A_2 \mid \dots \mid A_m \right).$$

13 Sigamos considerando una matriz A de orden (n, m), pero esta vez escribámosla así:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

con el fin de resaltar una *fila* genérica. Fijemos un número natural i de modo que $1 \leqslant i \leqslant n$. Se define la i-ésima **matriz fila de la matriz** A, que se denota: $\mathsf{F}_i(A)$, como aquella matriz fila de orden $(1, m)$ cuyos términos son los de la i-ésima fila de A. Es decir:

Matrices fila de una matriz



$$\mathsf{F}_i(A) = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \end{pmatrix}.$$

Si $F_1, F_2, \dots, F_n$ son las n matrices fila de la matriz A, la **notación por filas** de A es:

Notación por filas

$$A = \begin{pmatrix} F_1 \\ \hline F_2 \\ \hline \vdots \\ \hline F_n \end{pmatrix}.$$

4. Adición de matrices

La adición de matrices generaliza, en cierta forma, la adición de números. Como veremos, las propiedades de ambas operaciones son, de hecho, las mismas.