ÍNDICE

Capítulo 1. **SUCESIONES Y SERIES DE NÚMEROS REALES** 1

Introducción 2
Contenido 2
1.1 Sucesiones en $\mathbb{R}$ 2
1.1.1 Definiciones 3
1.1.2 Sucesiones acotadas 5
1.1.3 Límite de una sucesión. Sucesiones convergentes y divergentes 6
1.1.3.1 Operaciones con límites de sucesiones 9
1.1.4 Algunas sucesiones notables 13
1.1.5 Criterios prácticos para el cálculo de límites 15
1.1.6 Infinitésimos e infinitos. Equivalencias 18
1.2 Series en $\mathbb{R}$ 19
1.2.1 Definiciones 19
1.2.2 Tipos de series 20
1.2.3 Propiedades de las series 23
1.2.4 Criterios de convergencia de series 23
1.2.4.1 Convergencia de series de términos positivos 23
1.2.4.2 Convergencia de series de términos positivos y negativos 26
Ejercicios de autocomprobación 30
Soluciones a los ejercicios de autocomprobación 32
Ejercicios a resolver 36
Glosario 38
Bibliografía recomendada 38

Capítulo 2. **FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL** 39

Introducción 40
Contenido 43
2.1 Funciones de una variable 43
2.1.1 Funciones reales de una variable real 45
2.1.2 Funciones económicas 49
2.2 Estudio de las funciones elementales 53
2.2.1 Función lineal 53
2.2.2 Función cuadrática 64
2.2.3 Funciones polinómicas 70
2.2.4 Función módulo o valor absoluto 74
2.2.5 Función homográfica 82
2.2.6 Función exponencial 87
2.2.7 Función logarítmica 88
2.2.8 Funciones trigonométricas 90
2.3 Dominio de funciones 96
2.4 Clasificación de funciones 98
2.5 Función inversa 102
2.6 Función compuesta 109
2.7 Aplicaciones económicas 112
Ejercicios de autocomprobación 114

Soluciones a los ejercicios de autocomprobación 115
Ejercicios a resolver 118
Glosario 120
Bibliografía recomendada 120

Capítulo 3. **FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL EN VARIAS VARIABLES** 121

Introducción 122
Contenido 122
3.1 Funciones de varias variables 122
3.1.1 Funciones de dos variables 123
3.1.2 Dominio de una función de dos variables 123
3.1.3 Representación gráfica de una función de dos variables 128
3.1.4 Curvas de nivel 132
3.1.5 Aplicaciones económicas 134
Ejercicios de autocomprobación 139
Soluciones a los ejercicios de autocomprobación 140
Ejercicios a resolver 145
Glosario 146
Bibliografía recomendada 146

Capítulo 4. **LÍMITE DE FUNCIONES REALES EN UNA Y VARIAS VARIABLES REALES** 147

Introducción 149
Cómo estudiar este capítulo 150
Contenido 151
I. Límite de una variable real 151
4.1 Límite de funciones reales en una variable real 151
4.1.1 Noción intuitiva de límite 152
4.1.2 Aproximación a un punto 152
4.1.3 Diferencia entre valor de la función y valor del límite 153
4.1.4 Interpretación numérica mediante tablas 153
4.1.5 Interpretación gráfica 154
4.1.6 Ejemplos adicionales 155
4.2 Definición formal de límite 159
4.2.1 Definición ε-δ 159
4.2.2 Interpretación geométrica 159
4.2.3 Estructura lógica de la definición 160
4.2.4 Demostración de la existencia del límite 161
4.3 Límites laterales 164
4.4 Límites que no existen 165
II. Generalización o extensión del concepto de límite 170
4.5 Límites infinitos ($x \to a$) 170
4.6 Límite en el infinito o límite finito para $x \to \infty$ 171
4.7 Infinitésimos e infinitos 173
III. Cálculo analítico de límites de una variable 181
4.8 Técnicas básicas de cálculo 181
4.8.1 Límites por sustitución directa 181
4.8.2 Límites que no se resuelven por sustitución directa 185
4.9 Estudio de resolución de formas indeterminadas específicas 188

4.10 Comparación de órdenes de crecimiento ... 196
4.10.1 Idea fundamental ... 196
4.10.2 Jerarquía fundamental de crecimiento ... 196
4.10.3 Regla operativa para límites ... 197
4.10.4 Resultados fundamentales ... 197
4.10.5 Ejemplos ... 197
4.10.6 Conexión con infinitésimos (clave conceptual) ... 198
4.10.7 Interpretación estructural ... 198
4.10.8 Regla práctica final ... 198
IV. Límite de funciones de varias variables ... 202
4.11 Noción de límite en varias variables ... 202
4.12 Definición formal de límite en varias variables ... 203
4.13 Límites que no existen ... 211
V. Generalización o extensión del concepto de límite a varias variables ... 216
4.14 Límite infinito para $(x, y) \to (x_0, y_0)$ ... 216
4.15 Límite finito cuando $(x, y) \to \infty$ ... 218
4.16 Límite en el infinito o límite infinito cuando $(x, y) \to \infty$ ... 220
4.17 Infinitésimos e infinitos en varias variables ... 223
4.17.1 Infinitésimos en varias variables ... 223
4.17.2 Infinitos en varias variables ... 223
4.17.3 Dificultad esencial en varias variables ... 223
4.17.4 Criterio adoptado: infinitésimos e infinitos «seguros» ... 224
4.17.5 Infinitésimos seguros ... 224
4.17.6 Infinitos seguros ... 225
4.17.7 Tabla operativa (criterio de uso) ... 226
4.17.8 Idea clave (fundamental) ... 227
4.17.9 Regla de oro ... 227
4.17.10 Comentario final ... 227
VI. Cálculo del límite de funciones de dos variables ... 229
4.18 Estrategia general ... 229
4.18.1 Sustitución directa: cuándo es válida ... 231
4.19 Límites sucesivos o reiterados ... 233
4.20 Dependencia del camino ... 236
4.20.1 Límites radiales ... 236
4.20.2 Dependencia del parámetro (generalización) ... 239
4.20.3 Condición de unicidad ... 239
4.20.4 Limitaciones del método (incluyendo caminos radiales) ... 240
4.21 Coordenadas polares ... 240
4.21.1 Cambio de variables ... 240
4.21.2 Idea básica del método ... 240
4.21.3 Análisis de la dependencia angular ... 241
4.21.4 Qué permite concluir el paso a polares ... 243
4.21.5 Limitaciones del método ... 243
4.21.6 Coordenadas polares y límites cuando $(x, y) \to \infty$ ... 243
4.21.7 Relación con los apartados anteriores ... 247
4.21.8 Conclusión ... 247
4.22 Técnicas algebraicas en varias variables ... 249
4.23 Caja-resumen: «Algoritmo de resolución de límites en varias variables» ... 253
Ejercicios de autocomprobación ... 257
Soluciones a los ejercicios de autocomprobación ... 259
Ejercicios a resolver ... 263
Glosario ... 265
Bibliografía recomendada ... 265

Capítulo 5. CONTINUIDAD Y OTRAS APLICACIONES DEL LÍMITE DE FUNCIONES REALES EN UNA Y VARIAS VARIABLES REALES 267

Introducción ... 268
Cómo estudiar este capítulo ... 268
Contenido ... 271
5.1 Continuidad de funciones reales de una variable real ... 271
5.1.1 Continuidad en un punto ... 273
5.1.2 Funciones discontinuas en un punto ... 275
5.1.3 Continuidad en un intervalo ... 283
5.2 Asíntotas ... 286
5.3 Aplicaciones económicas ... 289
5.4 Continuidad en un punto en varias variables ... 298
5.4.1 Discontinuidad en un punto ... 300
5.4.2 Propiedades de las funciones continuas ... 302
5.5 Aplicaciones económicas ... 304
Ejercicios de autocomprobación ... 315
Soluciones a los ejercicios de autocomprobación ... 316
Ejercicios a resolver ... 319
Glosario ... 322
Bibliografía recomendada ... 322

Capítulo 6. LA DERIVADA DE FUNCIONES REALES EN UNA Y VARIAS VARIABLES REALES I 323

Introducción ... 325
Contenido ... 326
6.1 La derivada ... 326
6.1.1 Idea intuitiva de la derivada ... 327
6.1.2 Definición de derivada en un punto ... 330
6.1.3 Ecuaciones de las rectas tangente y normal ... 335
6.1.4 Relación entre continuidad y derivabilidad ... 336
6.2 Definición: función derivada ... 339
6.2.1 Definición ... 339
6.2.2 Propiedades de la derivada ... 341
6.2.3 Tabla de derivadas ... 341
6.2.4 Derivación de funciones compuestas. Regla de la Cadena ... 343
6.2.5 Derivada logarítmica ... 344
6.2.6 Derivada implícita ... 345
6.2.7 Derivadas sucesivas ... 346
6.3 La diferencial de una función ... 347
6.3.1 Definición ... 348
6.3.2 Interpretación geométrica del diferencial ... 348
6.3.3 Reglas de diferenciación ... 350
6.4 Aproximaciones polinómicas ... 352
6.4.1 Aproximación lineal ... 352
6.4.2 Aproximación polinómica de orden superior ... 352
6.4.3 Fórmula de Taylor ... 354
6.4.3.1 Fórmula de Maclaurin ... 354
6.4.4 Desarrollo en serie de una función de variable real ... 355
6.5 Aplicaciones de la derivada ... 357
6.5.1 Aplicación a la resolución de límites ... 357

6.5.2 Aplicaciones económicas 359
6.5.2.1 Análisis marginal 359
6.6 Apéndice del contenido 362
6.6.1 Teorema de Rolle 362
6.6.2 Teorema del Valor Medio de Lagrange 363
6.6.3 Teorema de Cauchy (o del Valor Medio generalizado) 366
Ejercicios de autocomprobación 368
Soluciones a los ejercicios de autocomprobación 369
Ejercicios a resolver 373
Glosario 375
Bibliografía recomendada 375

Capítulo 7. **FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES: DERIVACIÓN Y DIFERENCIACIÓN** 377

Introducción 378
Contenido 378
7.1 Diferenciación 378
7.1.1 Derivadas parciales 379
7.1.2 Función diferenciable 382
7.1.3 Aplicaciones económicas 386
7.1.3.1 Elasticidades parciales de la demanda 386
7.1.3.2 Relación Marginal de Sustitución Técnica 388
7.1.3.3 Relación Marginal de Sustitución 389
7.2 Derivadas sucesivas 389
7.2.1 Teorema de Schwarz 390
7.2.2 Diferenciales sucesivos 391
7.3 Desarrollo de funciones de dos variables 392
7.4 Derivación de funciones compuestas 397
7.5 Diferenciación de funciones implícitas 402
7.6 Funciones homogéneas 404
7.6.1 Teorema de Euler 404
7.6.2 Aplicación económica de la función homogénea 406
7.6.2.1 Rendimientos a escala 406
7.6.2.2 Ilusión monetaria 407
Ejercicios de autocomprobación 408
Soluciones a los ejercicios de autocomprobación 410
Ejercicios a resolver 417
Glosario 419
Bibliografía recomendada 419

Capítulo 8. **OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES EN UNA Y VARIAS VARIABLES** 421

Introducción 423
Contenido 423
8.1 Funciones crecientes y decrecientes 423
8.1.1 Definición 423
8.1.1.1 Propiedades 424
8.2 Valores extremos de una función continua 426
8.2.1 Definición de extremos locales 426
8.2.2 Definición de extremos absolutos 426

8.2.3 Condición necesaria para la existencia de extremos relativos 427
8.2.4 Condición suficiente para la existencia de extremos relativos..... 428
8.2.4.1 Primer criterio..... 428
8.2.4.2 Segundo criterio 429
8.2.5 Cálculo de extremos relativos 430
8.2.6 Cálculo de extremos absolutos 433
8.3 Concavidad, convexidad y puntos de inflexión 434
8.3.1 Definición de una función cóncava y convexa 434
8.3.2 Criterio de concavidad..... 435
8.3.3 Definición de punto de inflexión 435
8.4 Estudio completo de funciones 437
8.5 Aplicaciones económicas..... 444
8.6 Apéndice 447
8.6.1 Teorema de Bolzano..... 447
8.6.2 Corolario del teorema de Bolzano..... 447
8.7 Extremos locales para funciones de varias variables..... 447
8.7.1 Introducción a los extremos..... 448
8.7.2 Extremos locales para funciones de dos variables..... 448
8.7.2.1 Definición..... 448
8.7.2.2 Condición necesaria para la existencia de extremos relativos 449
8.7.2.3 Interpretación geométrica..... 450
8.7.2.4 Condiciones suficientes para la existencia de extremos relativos 451
8.7.2.5 Búsqueda de extremos relativos paso a paso..... 453
8.7.3 Generalización a más de dos variables..... 457
8.8 Aplicaciones a la optimización económica usando curvas de nivel 458
Ejercicios de autocomprobación 462
Soluciones a los ejercicios de autocomprobación 464
Ejercicios a resolver 471
Glosario..... 473
Bibliografía recomendada..... 473

Capítulo 9. **OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES CON RESTRICCIONES** 475

Introducción..... 477
Contenido..... 477
9.1 Extremos condicionados para funciones de varias variables 477
9.1.1 Introducción: restricciones de intervalo 477
9.1.2 Extremos condicionados para funciones de dos variables 478
9.1.2.1 Condiciones necesarias para la existencia de extremos condicionados. Método de los multiplicadores de Lagrange..... 481
9.1.2.2 Interpretación económica de λ 482
9.1.2.3 Condiciones suficientes para la existencia de extremos condicionados.... 486
9.1.2.4 Búsqueda de extremos condicionados paso a paso 488
9.1.3 Generalización a más de dos variables y múltiples restricciones 493
9.2 Estática Comparativa: El Teorema de la Envolvente..... 495
9.2.1 Introducción 495
9.2.2 Estática comparativa: una variable endógena y una exógena..... 496
9.2.3 Estática comparativa: varias variables endógenas y exógenas..... 497
9.2.4 Estática comparativa con restricciones..... 499
9.3 Optimización con restricciones de desigualdad..... 504
9.3.1 Introducción 504
9.3.2 Programación no lineal..... 505
9.3.2.1 Consideraciones sobre las condiciones de Kuhn-Tucker..... 509
Ejercicios de autocomprobación 510

Soluciones a los ejercicios de autocomprobación 511
Ejercicios a resolver 522
Glosario 524
Bibliografía recomendada 524

Capítulo 10. **INTEGRALES EN UNA VARIABLE** 525

Introducción 527
Cómo estudiar este capítulo 528
Contenido 530
10.1 Integrales indefinidas 530
10.1.1 Función primitiva 530
10.1.2 Integral indefinida. Definición 531
10.1.3 Propiedades 532
10.1.4 Tabla de integrales inmediatas 533
10.1.5 Métodos de integración 535
10.1.5.1 Método de integración por sustitución 535
10.1.5.2 Método de integración por partes 538
10.1.5.3 Método de integración por fracciones simples 541
10.1.6 Aplicaciones económicas 550
10.1.6.1 Coste marginal y coste total 551
10.1.6.2 Ingreso marginal e ingreso total 553
10.1.6.3 Coste medio y fracciones simples 554
10.1.6.4 Capitalización continua 556
10.1.6.5 Demanda acumulada y estacionalidad 557
10.1.6.6 Duración financiera simplificada 558
10.1.6.7 Ingreso acumulado y evolución temporal de precios 560
10.2 Integral definida 561
10.2.1 Definición de integral definida 563
10.2.2 Teorema del valor medio del Cálculo Integral 565
10.2.3 Primer Teorema Fundamental del Cálculo Integral 568
10.2.4 Segundo Teorema Fundamental del Cálculo Integral (Regla de Barrow) 574
10.2.5 Propiedades de la integral definida 577
10.2.6 Cálculo de áreas 578
10.2.7 Aplicaciones económicas de la integral definida 589
10.3 Integrales impropias 595
10.3.1 Integrales con límites infinitos 595
10.3.2 Integral de una función discontinua 596
10.3.3 Definición 597
10.3.4 Aplicaciones económicas 598
Ejercicios de autocomprobación 601
Soluciones a los ejercicios de autocomprobación 604
Ejercicios a resolver 610
Glosario 613
Bibliografía recomendada 613

Capítulo 11. **LA INTEGRAL DOBLE: DEFINICIÓN, PROPIEDADES Y EJEMPLOS** 615

Introducción 617
Contenido 618
11.1 Introducción intuitiva al concepto de integral doble 618

11.1.1 De la integral simple a la integral doble 618
11.1.2 La idea geométrica: volumen bajo una superficie 619
11.1.3 Propiedades 620
11.2 Definición formal 620
11.2.1 La suma de Riemann doble 620
11.2.2 Definición de la integral doble 621
11.2.3 De la integral doble a la integral iterada 621
11.2.4 La integral doble como generalizador del concepto de área 621
11.2.5 Ejemplos ilustrativos 622
11.3 Propiedades fundamentales de la integral doble 624
11.3.1 Linealidad 624
11.3.2 Aditividad respecto a la región 625
11.3.3 Positividad 625
11.3.4 Monotonía 626
11.3.5 Cota o desigualdad 626
11.3.6 Resumen de propiedades 627
11.3.7 Cambio de variables 627
11.4 Integrales iteradas 630
11.4.1 Integración parcial: la idea fundamental 630
11.4.2 Interpretación geométrica de la integración parcial 630
11.4.3 Regiones de tipo I y de tipo II 631
11.4.4 El teorema de Fubini 634
11.5 Ejemplos ilustrativos 636
11.6 Ejemplos de aplicación a problemas económicos 640
11.7 Ejemplos de aplicación de integrales a los métodos cuantitativos 644
Ejercicios de autocomprobación 650
Soluciones a los ejercicios de autocomprobación 651
Ejercicios a resolver 652
Glosario 656