CAPÍTULO 1

Sucesiones y series de números reales

ESQUEMA-RESUMEN

Introducción
Contenido
- **1.1** Sucesiones en $\mathbb{R}$
  - **1.1.1** Definiciones
  - **1.1.2** Sucesiones acotadas
  - **1.1.3** Límite de una sucesión. Sucesiones convergentes y divergentes
    - **1.1.3.1** Operaciones con límites de sucesiones
  - **1.1.4** Algunas sucesiones notables
  - **1.1.5** Criterios prácticos para el cálculo de límites
  - **1.1.6** Infinitésimos e infinitos. Equivalencias
- **1.2** Series en $\mathbb{R}$
  - **1.2.1** Definiciones
  - **1.2.2** Tipos de series
  - **1.2.3** Propiedades de las series
  - **1.2.4** Criterios de convergencia de series
    - **1.2.4.1** Convergencia de series de términos positivos
    - **1.2.4.2** Convergencia de series de términos positivos y negativos

Ejercicios de autocomprobación
Soluciones a los ejercicios de autocomprobación
Ejercicios a resolver
Glosario
Bibliografía recomendada

OBJETIVOS DIDÁCTICOS

- Comprender el concepto de sucesión.
- Calcular el límite de una sucesión.
- Aplicar diferentes criterios para determinar si una sucesión es convergente.
- Comprender el concepto de serie y sus propiedades.
- Aplicar los diferentes criterios existentes para garantizar la convergencia de una serie.

INTRODUCCIÓN

En este capítulo estudiaremos sucesiones y series de números reales. Se trata de dos términos que habitualmente son considerados sinónimos, siendo utilizados indistintamente para designar un conjunto de valores dispuestos en un orden determinado. Sin embargo, en Matemáticas estos conceptos tienen significados diferentes. Así, el concepto de sucesión posee un sentido similar al empleado en el lenguaje coloquial, pues hace referencia a un conjunto ordenado de números, mientras que el concepto de serie, aunque también hace referencia a un conjunto de elementos ordenados, dichos elementos se corresponden con sumas de valores de una sucesión.

El estudio de las sucesiones y las series se remonta a la antigua Grecia, cuando Zenón plantea sus conocidas paradojas en el siglo V a.C, las cuales involucran el cálculo de sumas de un número infinito de términos. Posteriormente en los siglos XIII y XIV algunos matemáticos como Fibonacci, Oresme o Swineshead comienzan a manifestar interés por la resolución del problema de la convergencia. Sin embargo no será hasta los s. XVII y XVIII cuando importantes matemáticos como Euler, Gauss, Cauchy o Leibniz obtendrán resultados fundamentales que permitirán caracterizar el carácter convergente o divergente de sucesiones y series, coincidiendo con el perfeccionamiento del concepto de límite.

Actualmente los resultados derivados del estudio de las sucesiones y las series son de vital importancia para demostrar ciertos teoremas y propiedades en el campo de la topología matemática. No obstante, su uso no se limita únicamente a las Matemáticas teniendo un papel importante en otras disciplinas tales como la Biología, la Electrónica o la Química. En el caso particular del área de Economía y Administración de Empresas, su uso permite modelizar procesos dinámicos como la evolución de beneficios, el crecimiento de inversiones o la amortización de deuda.

CONTENIDO

- Sucesiones
- Límite de sucesiones
- Convergencia de sucesiones
- Series
- Propiedades de las series
- Criterios de convergencia de las series

1.1. SUCESIONES EN $\mathbb{R}$

Se tratarán los siguientes conceptos:

- Sucesiones de números reales.
- Límite de una sucesión.
- Sucesiones convergentes y divergentes.
- Criterio de convergencia de Stolz.
- Teorema de Toeplitz.

1.1.1. Definiciones

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un subconjunto de números reales y $f : N \to A$ una función, de tal forma que para $\forall n \in \mathbb{N}$, existe $f(n)$ tal que $f(n) \in A$. Al conjunto de valores $\{f(n)\} \subseteq A$ se le denomina ***sucesión de números reales*** y lo denotaremos por $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, donde a cada uno de los valores a_n se le conoce como el *n*-ésimo término de la sucesión.

Asimismo, diremos que una sucesión de números reales $\{a_n\}$ es ***monótona creciente*** si verifica que, para todo *n*:

$$a_n \leq a_{n+1}$$

Si en la expresión anterior la desigualdad fuera estricta, tal que $a_n < a_{n+1}$, diremos que la sucesión es ***estrictamente creciente***.

Del mismo modo, diremos que una sucesión de números reales $\{a_n\}$ es ***monótona decreciente*** si, para *n*, verifica que:

$$a_n \geq a_{n+1}$$

Nuevamente, si en la expresión anterior la desigualdad fuera estricta, tal que $a_n > a_{n+1}$, diremos que la sucesión es ***estrictamente decreciente***.

Asimismo, diremos que una sucesión $\{a_n\}$ es ***constante*** si verifica que:

$$a_n = a$$

Donde *a* es un valor constante.

Ejemplo 1.1. La sucesión de potencias de números naturales cuya base y exponente son iguales se representa por $\{n^n\}_{n=1}^{\infty}$ y está formada por los siguientes números:

$$\{n^n\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 4, 27, 256, 3.125, \ldots\}$$

Dicha sucesión es estrictamente creciente por cuanto sus valores crecen de forma continua a medida que aumenta el valor de *n*.

Por su parte, la sucesión definida de la forma:

$$\left\{\frac{n+1}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{2, \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}, \ldots\right\}$$

Es estrictamente decreciente, ya que sus valores decrecen de forma sistemática a medida que aumenta *n*.

Finalmente, la sucesión $\{1^n\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 1, 1, \ldots\}$ es constante por cuanto su valor siempre es igual a 1 independientemente del valor de *n*.

Ejemplo 1.2. Demostrar que la sucesión $\left\{\frac{2n}{n+3}\right\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión estrictamente creciente.

Para demostrarlo basta con restar dos términos consecutivos de la sucesión tal que:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)}{(n+1)+3} - \frac{2n}{n+3} = \frac{(2n+2)(n+3) - 2n(n+4)}{(n+4)(n+3)} = \frac{6}{(n+4)(n+3)}$$

La expresión resultante es siempre mayor que cero para todo $n > 1$. Por tanto se verifica que $a_{n+1} - a_n > 0 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$ al ser el denominador positivo para todo,$n \in \mathbb{N}$, por lo que la sucesión es estrictamente creciente.

Ejemplo 1.3. Comprobar que la sucesión $\left\{\frac{9^n}{n!}\right\}_{n=9}^{\infty}$ es una sucesión estrictamente decreciente.

Para comprobarlo, restamos dos términos consecutivos de la sucesión tal que:

$$a_{n+1}-a_n=\frac{9^{n+1}}{(n+1)!}-\frac{9^n}{n!}=\frac{9^n\cdot 9-9^n(n+1)}{(n+1)n!}=\frac{9^n}{n!}\cdot\left(\frac{8-n}{n+1}\right)$$

Donde hemos aprovechado la propiedad de los factoriales que nos permite escribir que $(n + 1)! = (n + 1)\cdot n!$

La expresión resultante es siempre menor que cero para todo $n \geq 9$. Por tanto se verifica que $a_{n+1} - a_n < 0 \Rightarrow a_{n+1} < a_n$ por lo que la sucesión es estrictamente decreciente a partir de $n = 9$.

También podemos encontrarnos con el caso de que una sucesión no sea creciente, ni decreciente ni constante, sino que sea de tipo ***oscilante***. Este tipo de sucesiones verifica que:

$$a_n > a_{n+1} \quad \text{y} \quad a_{n+1} < a_{n+2}$$

O también:

$$a_n < a_{n+1} \quad \text{y} \quad a_{n+1} > a_{n+2}$$

Ejemplo 1.4. Las siguientes sucesiones presentan un comportamiento de tipo oscilante ya que sus valores no siguen un patrón creciente, decreciente o constante.

$$\left\{(-2)^n\right\}_{n=0}^{\infty}=\{1,-2,4,-8,16,-32,\ldots\}$$

$$\left\{(-1)^n n^2\right\}_{n=0}^{\infty}=\{0,-1,4,-9,16,-25,\ldots\}$$

$$\left\{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right\}_{n=0}^{\infty}=\left\{1,\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{2},\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{-1}{\sqrt{6}},\ldots\right\}$$

Ejemplo 1.5. (Sucesión de Fibonacci). Esta sucesión, descubierta en el siglo XIII por el matemático Leonardo de Pisa, también conocido como Fibonacci[1], aparece en la obra *Liber Abacci* como solución a un problema de la cría de conejos. Fibonacci supuso que una pareja de conejos criaba una nueva pareja cada mes y que, después de dos meses, cada nueva pareja se comportaba del mismo modo.

De este modo, el número de parejas nacidas en un mes determinado se obtiene como la suma del número de parejas de los dos meses anteriores, puesto que nace una pareja por cada pareja nacida en el mes anterior, y además cada pareja nacida hace dos meses produce ahora una pareja nueva. Siguiendo este razonamiento, suponiendo que comenzamos con una pareja de conejos, la sucesión de números de Fibonacci sería la siguiente:

$$\{a_n\}=\{1,1,2,3,5,8,13,\ldots\}$$

Donde los términos de la sucesión se han obtenido de la siguiente manera:

[1] El origen de este sobrenombre procede de la contracción de la expresión italiana Fibonacci (*figlio di Bonacci*, es decir, hijo de Bonacci).

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 0 + a_1 = 1$$
$$a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2$$
$$a_4 = a_2 + a_3 = 1 + 2 = 3$$
$$a_5 = a_3 + a_4 = 2 + 3 = 5$$
$$\ldots$$
$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$$
$$\ldots$$

En 1843 el matemático francés Jacques Philippe Binet[2] descubre cómo obtener el *n*-ésimo término de la sucesión de Fibonacci a través de la siguiente fórmula:

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Donde el número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es lo que se conoce como la *razón áurea*.

La sucesión de Fibonacci posee numerosas aplicaciones en Matemáticas, apareciendo también en múltiples configuraciones biológicas, como por ejemplo en las ramas de los árboles, en la disposición de las hojas en el tallo, en las inflorescencias del brócoli romanescu o en la estructura espiral del caparazón de algunos moluscos, fenómenos naturales en los que la razón áurea suele aparece con bastante frecuencia.

1.1.2. Sucesiones acotadas

Diremos que una sucesión de números reales $\{a_n\}$ está ***acotada superiormente*** si existe un número real Q que verifica que $\{a_n\} \leq Q$. En este caso, diremos que Q es la ***cota superior*** de la sucesión. Asimismo, a la menor de las cotas superiores la denominaremos ***extremo superior*** o ***supremo*** de la sucesión. Por último, si el supremo de la sucesión es uno de sus términos lo denominaremos ***máximo***.

De forma análoga, diremos que una sucesión de números reales $\{a_n\}$ está ***acotada inferiormente*** si existe un número real P que verifica que $\{a_n\} \geq P$. En este caso, diremos que P es la ***cota inferior*** de la sucesión. Además, a la mayor de las cotas inferiores la denominaremos ***extremo inferior*** o ***ínfimo*** de la sucesión. Por último, si el ínfimo de la sucesión es uno de sus términos lo denominaremos ***mínimo***.

Finalmente, diremos que una sucesión está ***acotada*** si está acotada superior e inferiormente, es decir, si existe un número Q mayor o igual que todos los términos de la sucesión y otro número P menor o igual que todos los términos de la sucesión, de tal forma que todos los términos de la sucesión estarán comprendidos entre P y Q.

Ejemplo 1.6. Analizar si las siguientes sucesiones están acotadas.

a) $\{n\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

El mínimo de la sucesión es 1; no está acotada superiormente.

[2] Si bien tradicionalmente la fórmula se ha atribuido a Binet, parece ser que Moivre ya habría obtenido la fórmula en 1718.

b) $\{-n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1,-2,-3,-4,\ldots\}$

El máximo de la sucesión es –1; no está acotada inferiormente.

c) $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4}\ldots\right\}$

El máximo de la sucesión es 2, mientras que su ínfimo es 1. Por tanto la sucesión está acotada, por estar acotada superior e inferiormente.

d) $\{(-1)^{n-1}2^n\}_{n=1}^{\infty} = \{2,-4,8,-16,\ldots\}$

No está acotada ni superior ni inferiormente.

e) $\left\{\frac{n+2}{2n-1}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{3,\frac{4}{3},1,\frac{6}{7},\frac{7}{9},\frac{8}{11}\ldots\right\}$

La sucesión está acotada, por tener un máximo en +3 y un ínfimo en 1/2.

1.1.3. Límite de una sucesión. Sucesiones convergentes y divergentes

Diremos que los términos de una sucesión de números reales convergen a un número L, si dado un número cualquiera $\varepsilon > 0$, es posible encontrar un número natural $N > 0$ tal que si $n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$. La convergencia al número L puede denotarse de la siguiente manera:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

La expresión anterior nos indica que el límite cuando n tiende a infinito (∞) de la sucesión $\{a_n\}$ es igual a L. Si existe el límite definido anteriormente diremos que la sucesión es ***convergente***, siendo dicho límite único.

Ejemplo 1.7. Comprobar que la sucesión $\left\{\frac{K}{n}\right\}$ converge a 0 cuando n tiende a infinito, siendo K mayor que cero.

Para comprobarlo, recordemos la definición de convergencia: debemos demostrar que dado $\varepsilon > 0$, existe un $N > 0$, tal que si $n > N$ entonces se cumple que $\left|\frac{K}{n} - 0\right| < \varepsilon$. Por tanto, debe verificarse que:

$$\left|\frac{K}{n}\right| < \varepsilon$$

Dado que $\left|\frac{K}{n}\right|$ siempre es positivo podemos prescindir del valor absoluto:

$$\frac{K}{n} < \varepsilon$$

Invirtiendo la expresión resulta que:

$$n > \frac{K}{\varepsilon}$$

Por tanto:

$$n > \frac{K}{\varepsilon} = N$$

La expresión anterior no solo garantiza la existencia de N, sino que también se cumple que si $n > N$ entonces $\left|\frac{K}{n} - 0\right| < \varepsilon$, confirmando así la sucesión converge a cero.

En términos económicos, supongamos que K representa un coste fijo, de tal forma que $\frac{K}{n}$ representa el coste fijo medio.

La convergencia de la sucesión lo que nos indica es que, cuando la producción crece indefinidamente, el coste fijo medio tiende a cero.

Por el contrario, si el límite anteriormente definido tiende a infinito o a menos infinito, entonces diremos que la sucesión es ***divergente***.

En particular, dada una sucesión de números reales $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, diremos que esta se aproxima a infinito cuando n tiende a infinito si para cualquier número real $M > 0$ existe N tal que si $n > N$ entonces $|a_n| > M$ y podemos escribir:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

A fin de precisar más el signo de crecimiento de la sucesión podemos definir los siguientes límites:

- Dada una sucesión de números reales $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, diremos que esta se aproxima a más infinito cuando n tiende a infinito si para cualquier $M > 0$ existe N tal que si $n > N$ entonces $a_n > M$ y podemos escribir:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

- Del mismo modo, dada una sucesión de números reales $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, diremos que esta se aproxima a menos infinito cuando n tiende a infinito si para cualquier $M > 0$ existe N tal que si $n > N$ entonces $a_n < -M$ y podemos escribir:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

Ejemplo 1.8. Comprobar que la sucesión $\{n^2\}$ es divergente a más infinito cuando n tiende a infinito.

Para comprobar que la sucesión es divergente debe verificarse que para cualquier número real $M > 0$ existe un número natural N tal que si $n > N$ entonces $a_n = n^2 > M$.

Si se verifica que $n^2 > M$, entonces tenemos que $n > \sqrt{M}$. Si hacemos $N = \sqrt{M}$ se tiene que si $n > N = \sqrt{M}$ entonces $a_n = n^2 > M$, verificándose así la definición de sucesión divergente.

De los resultados que acabamos de ver, podemos concluir que:

1. Una sucesión creciente que esté acotada superiormente es convergente.
2. Una sucesión creciente que no esté acotada superiormente es divergente a infinito.
3. Una sucesión decreciente que esté acotada inferiormente es convergente.
4. Una sucesión decreciente que no esté acotada inferiormente diverge a menos infinito.

Por otro lado, el motivo por el que generalmente una sucesión posee carácter divergente es que no está acotada, pero en ocasiones también podemos encontrarnos con sucesiones que simplemente no tienen límite debido a que presentan un comportamiento oscilante.

Definición. Si una sucesión de números reales es divergente pero no diverge ni a infinito ($+\infty$) ni a menos infinito ($-\infty$), entonces diremos que la sucesión es ***oscilante***.

Ejemplo 1.9. Las siguientes sucesiones presentan un comportamiento oscilante:

a) La sucesión formada por los siguientes términos:

$$\left\{1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \ldots\right\}$$

No es convergente, pero tampoco tiende a $+\infty$ ni a $-\infty$. Podemos observar que los términos impares se hacen infinitamente grandes a medida que n crece, pero del mismo modo los términos pares tienden a 0.

b) Otra sucesión que no tiene límite es la que tiene por término general $a_n = (-1)^n \cdot n$ y cuyos primeros términos son:

$$-1, 2, -3, 4, -5, 6, -7, 8, \ldots$$

Si analizamos esta sucesión veremos que sus términos tampoco se acercan a un número concreto. Por el contrario, cuando n tiende a infinito, la sucesión tiende a $+\infty$ para los términos pares y a $-\infty$ para los términos impares. Por lo tanto, tampoco tiene límite definido.

Por último, el siguiente resultado nos permitirá calcular el límite de sucesiones que se encuentran acotadas por otras dos sucesiones cuyos límites son iguales.

Teorema del Sándwich. Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ sucesiones de números reales. Si se verifica que $a_n \leq b_n \leq c_n$ para todo n mayor que algún índice N, y se cumple que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, entonces se verifica que $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Ejemplo 1.10. Utilizando el teorema del sándwich, probar que la sucesión:

$$a_n = 1 + \frac{\cos(n)}{\sqrt{n}}$$

Converge a 1.

Como sabemos la función cos(n) está acotada entre –1 y +1 tal que:

$$-1 \leq \cos(n) \leq 1$$

Si dividimos la desigualdad por raíz de n queda que:

$$-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{\cos(n)}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Sumando 1 a cada lado de la desigualdad:

$$1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1 + \frac{\cos(n)}{\sqrt{n}} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Como las sucesiones $1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$ y $1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$ convergen a 1, podemos asegurar aplicando el teorema del sándwich que la sucesión también converge $1 + \frac{\cos(n)}{\sqrt{n}}$ a 1.

Ejemplo 1.11. Supongamos que el beneficio esperado por una empresa es 100 (en miles de euros). Sin embargo, existe un pequeño error de previsión que depende del tamaño del mercado y que puede ser positivo o negativo.

Modelizamos el beneficio real como:

$$B_n = 100 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

Donde:

- n representa el tamaño del mercado.
- $(-1)^n$ introduce una oscilación (un año el error es positivo, otro negativo).
- $1 / \sqrt{n}$ indica que la magnitud del error disminuye cuando el mercado crece.

Sabemos que:

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1$$

Por tanto:

$$-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Sumando 100 en los tres miembros:

$$100 - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq B_n \leq 100 + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Cuando $n \to \infty$:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$$

Entonces:

$$100 - \frac{1}{\sqrt{n}} \to 100$$

$$100 + \frac{1}{\sqrt{n}} \to 100$$

Aplicando el teorema del sándwich tenemos que el beneficio está «atrapado» entre dos funciones que convergen a 100.

Por tanto:

$$\lim_{n\to\infty} B_n = 100$$

1.1.3.1. Operaciones con Límites de Sucesiones

Pasamos a continuación a ver algunas reglas que nos resultarán muy útiles a la hora de calcular el límite de una sucesión:

1. El límite de una sucesión constante c es la propia constante tal que:

$$\lim_{n\to\infty} c = c$$

2. Dadas la sucesión convergente $\{a_n\}$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ y la constante c, se verifica que la sucesión resultante de multiplicar $\{a_n\}$ por c también es convergente siendo su límite:

$$\lim_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot a$$

3. El límite de una sucesión de la forma $\{a_n\} = n^c$, siendo $c > 0$, es:

$$\lim_{n\to\infty} n^c = \infty$$

4. El límite de una sucesión de la forma $\{a_n\} = \frac{1}{n^c}$, siendo $c > 0$, es:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^c} = 0$$

5. El límite de una sucesión de la forma $\{a_n\} = c^n$ dependerá del valor de c. En particular:

$$\lim_{n\to\infty} c^n = \begin{cases} 0, & \text{si } -1 < c < 1 \\ 1, & \text{si } c = 1 \\ \infty, & \text{si } c > 1 \\ \text{no existe}, & \text{si } c \le -1 \end{cases}$$

6. La suma de dos sucesiones convergentes $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, tales que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, también es convergente, siendo su límite igual a la suma de los límites de cada sucesión tal que:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$$

Ejemplo 1.12. Calcular el límite cuando n tiende a infinito para la sucesión cuyo término general es de la forma:

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right) + \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2n}\right) = 0 + 0 = 0$$

Como podemos ver el resultado obtenido coincide con la suma de los límites individuales de cada sucesión.

En caso de que el límite de uno de los sumandos fuera $+\infty$ o $-\infty$ y el otro término tenga límite finito, la suma tendrá como límite $+\infty$ o $-\infty$ respectivamente.

Asimismo, si el límite de ambos sumandos fuera $+\infty$ o $-\infty$, la suma tendrá entonces como límite $+\infty$ o $-\infty$.

Por último, si un sumando tiene como límite $+\infty$ y el otro $-\infty$, el límite de la suma en este caso será indeterminado, del tipo $[\infty - \infty]$. No obstante, como veremos en el siguiente ejemplo, en algunos casos es posible salvar esta indeterminación[3].

Ejemplo 1.13. Calcular el límite cuando n tiende a infinito para la sucesión cuyo término general es de la forma:

$$a_n = 5n^3 - 6n^2$$

Calculando el límite obtenemos una indeterminación tal que:

$$\lim_{n\to\infty} \left(5n^3 - 6n^2\right) = \infty - \infty$$

Sin embargo, al tratarse de un polinomio, bastará con considerar despreciables todos los términos excepto el de mayor grado. Para ello, transformamos la sucesión sacando factor común el término de mayor grado del polinomio, obteniendo que:

$$\lim_{n\to\infty} \left(5n^3 - 6n^2\right) = \lim_{n\to\infty} 5n^3 \left(1 - \frac{6}{5n}\right) = \lim_{n\to\infty} 5n^3 = \infty$$

---

7. El producto de dos sucesiones convergentes $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ también es convergente, siendo su límite igual al producto de los límites de cada sucesión. Es decir:

---

[3] En general, cuando hablemos de indeterminación, no significará que el límite no exista, solo que no es posible pronosticar su resultado aun conociendo el comportamiento de la sucesión. No obstante, como veremos a lo largo del capítulo, realizando ciertas transformaciones a la sucesión podremos averiguar el valor del límite.

Ejemplo 1.14. Calcular el límite cuando n tiende a infinito para la sucesión cuyo término general es de la forma:

$$a_n = \frac{1}{n2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n2^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right) = 0\cdot 0 = 0$$

Como podemos ver el resultado obtenido coincide con el producto de los límites individuales de cada sucesión.

En caso de que el límite de uno de los sumandos fuera $+\infty$ o $-\infty$ y el otro término tenga límite finito y no nulo, el producto tendrá por límite $+\infty$ o $-\infty$ respectivamente.

Asimismo, si el límite de los sumandos fuera $+\infty$ o $-\infty$, su producto tendrá entonces como límite $+\infty$ o $-\infty$, determinándose el signo siguiendo las reglas habituales de signos.

Por último, si una de las sucesiones tiene como límite $+\infty$ o $-\infty$, y la otra presenta límite nulo, entonces el límite del producto en este caso será indeterminado, del tipo $[\infty \cdot 0]$ o $[0 \cdot \infty]$.

Ejemplo 1.15. Calcular el límite cuando n tiende a infinito para la sucesión cuyo término general es de la forma:

$$a_n = n\cdot\sqrt{\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\sqrt{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n}} = \infty\cdot 0$$

El resultado sería por tanto una indeterminación.

8. Dadas las sucesiones convergentes $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, siendo $b \neq 0$, se verifica que el límite del cociente de dichas sucesiones será el cociente de sus límites tal que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$$

En caso de que $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, entonces se cumple que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = 0$$

Por su parte, si $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, con $a \neq 0$, y $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, entonces se verifica que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \infty$$

Si ambos límites tienden a infinito (tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$), el límite del cociente de las sucesiones será indeterminado del tipo $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Por último, si los límites de ambas sucesiones tienden a cero (tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$), el límite de su cociente será indeterminado del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$.