# Índice general


**1. Aritmética finita y análisis de errores** **1**

1.1. Representación de números en el ordenador . . . . . 2

1.2. Errores: taxonomía y propagación . . . . . 5

1.2.1. Propagación de errores y cancelación catastrófica . . . 6

1.2.2. Propagación de errores en fórmulas: la regla de la cadena numérica . . . . . 8

1.3. Condicionamiento y estabilidad . . . . . 11

1.4. Series de Taylor y cotas de error . . . . . 13

Notación *O* de Landau y orden de convergencia . . . . . 16

1.5. Ejercicios resueltos . . . . . 17

1.6. Ejercicios propuestos . . . . . 21

1.7. Prácticas con ordenador . . . . . 25

1.8. Historia y apertura . . . . . 26

**2. Resolución de sistemas lineales** **27**

2.1. El método de Gauss y la factorización LU . . . . . 28

2.1.1. Pivotaje parcial . . . . . 35

2.1.2. Factorizaciones especiales . . . . . 38

2.2. Coste computacional . . . . . 44

2.3. Número de condición y análisis del error . . . . . 45

2.3.1. Estimación práctica del error: refinamiento iterativo . . 47

2.4. Métodos iterativos . . . . . 50

2.4.1. Método de Jacobi . . . . . 51

2.4.2. Método de Gauss-Seidel . . . . . 51

2.4.3. El método de Kaczmarz . . . . . 54

2.5. Factorización QR y transformaciones de Householder . . . . . 58

2.6. Análisis de convergencia de métodos iterativos: radio espectral y método SOR . . . . . 61
2.6.1. Métodos de Krylov: gradiente conjugado y GMRES . . 63
2.6.2. Precondicionamiento . . . . . 67
2.7. Ejercicios resueltos . . . . . 69
2.8. Ejercicios propuestos . . . . . 79
2.9. Prácticas con ordenador . . . . . 85
2.10. Perspectivas y extensiones . . . . . 86
2.11. Nota histórica . . . . . 87

**3. Valores y vectores propios** **89**
Motivación: problemas que requieren autovalores . . . . . 89
3.1. El método de la potencia . . . . . 91
3.1.1. Variantes: potencia inversa y desplazamiento . . . . . 95
3.2. Sucesiones de Krylov y el polinomio característico . . . . . 97
3.3. Descomposición en valores singulares . . . . . 99
3.4. El algoritmo QR iterativo . . . . . 104
Localización: Gershgorin y Sturm . . . . . 106
3.4.1. Descomposición de Schur . . . . . 109
3.4.2. Convergencia del algoritmo QR . . . . . 110
3.5. Ejercicios resueltos . . . . . 112
3.6. Ejercicios propuestos . . . . . 121
3.7. Prácticas con ordenador . . . . . 126
3.8. Perspectivas y extensiones . . . . . 127
3.9. Nota histórica . . . . . 127

**4. Interpolación polinómica** **129**
Motivación: aplicaciones de la interpolación . . . . . 129
4.1. Existencia y unicidad: el determinante de Vandermonde . . . 130
4.2. La forma de Lagrange . . . . . 131
4.3. La forma de Newton y las diferencias divididas . . . . . 132
4.4. Error de interpolación . . . . . 134
4.4.1. Los polinomios de Chebyshev . . . . . 135
4.4.2. Nodos de Chebyshev y optimalidad . . . . . 137
4.4.3. Mejor aproximación uniforme y teorema de alternancia 139
4.4.4. Criterio de Kolmogorov para la mejor aproximación . 141
4.4.5. Teoremas de Jackson y Bernstein . . . . . 142
4.4.6. El algoritmo de Remez . . . . . 143

4.4.7. Convergencia espectral . . . . . 144
4.4.8. La fórmula baricéntrica de interpolación . . . . . 147
4.5. Interpolación de Hermite . . . . . 149
4.6. Interpolación a trozos y splines cúbicos . . . . . 150
4.6.1. Condiciones de contorno y convergencia . . . . . 152
4.7. El problema general de interpolación . . . . . 154
4.8. ¿Cuándo no interpolar? . . . . . 155
4.9. Derivación numérica por interpolación . . . . . 155
4.10. Ejercicios resueltos . . . . . 157
4.11. Ejercicios propuestos . . . . . 163
4.12. Prácticas con ordenador . . . . . 168
4.13. Perspectivas y extensiones . . . . . 168
4.14. Nota histórica . . . . . 170

**5. Ajuste por mínimos cuadrados** **171**
Motivación: datos ruidosos y modelos . . . . . 171
5.1. El problema de mínimos cuadrados lineales . . . . . 172
5.1.1. Regresión polinómica . . . . . 177
5.1.2. Linealización de modelos no lineales . . . . . 178
5.2. Interpretación como proyección ortogonal . . . . . 181
5.2.1. Regresión lineal múltiple . . . . . 182
5.3. Ejercicios resueltos . . . . . 184
5.4. Ejercicios propuestos . . . . . 190
5.5. Prácticas con ordenador . . . . . 193
5.6. Perspectivas y extensiones . . . . . 195

**6. Derivación numérica** **197**
Motivación: aplicaciones que requieren derivadas numéricas . . . . 197
6.1. Obtención de fórmulas por desarrollo de Taylor . . . . . 198
6.2. Error total: truncamiento y redondeo . . . . . 200
6.3. Obtención de fórmulas por interpolación . . . . . 203
6.4. Extrapolación de Richardson . . . . . 206
6.5. Ejercicios resueltos . . . . . 207
6.6. Ejercicios propuestos . . . . . 215
6.7. Prácticas con ordenador . . . . . 217
6.8. Perspectivas y extensiones . . . . . 218

**7. Cuadratura numérica** **219**
Motivación: cuándo es necesaria la cuadratura numérica . . . . . 219
7.1. Reglas de cuadratura: grado de exactitud . . . . . 221
7.2. Reglas de Newton-Cotes . . . . . 221
7.3. Reglas compuestas . . . . . 223
7.4. Estimación del error: extrapolación de Richardson y Romberg 226
7.5. Cuadratura gaussiana . . . . . 229
7.6. Existencia y optimalidad de la cuadratura gaussiana . . . . . 232
7.6.1. Fórmulas de Radau y Lobatto . . . . . 233
7.6.2. Tabla de cuadraturas gaussianas con función de peso . 234
7.7. Ejercicios resueltos . . . . . 236
7.8. Ejercicios propuestos . . . . . 245
7.9. Prácticas con ordenador . . . . . 252
7.10. Perspectivas y extensiones . . . . . 252
7.11. Nota histórica . . . . . 253

**8. Ecuaciones escalares no lineales** **255**
Motivación: ecuaciones con raíces no algebraicas . . . . . 255
8.1. Existencia y localización de raíces . . . . . 256
8.2. Método de bisección . . . . . 257
8.3. Iteración de punto fijo . . . . . 259
8.3.1. Orden de convergencia . . . . . 260
8.4. Método de Newton . . . . . 261
8.4.1. Convergencia global de Newton: criterios convexos . . 262
8.5. Ecuaciones polinómicas: deflación y Bairstow . . . . . 267
8.5.1. División sintética y factorización cuadrática . . . . . 267
8.5.2. El método de Bairstow . . . . . 268
8.6. El método de la secante . . . . . 271
8.6.1. Equivalencia con la secante . . . . . 272
8.7. Criterios de parada y análisis de error . . . . . 273
8.8. Resumen: convergencia global versus local . . . . . 274
8.9. Ejercicios resueltos . . . . . 276
8.10. Ejercicios propuestos . . . . . 281
8.11. Prácticas con ordenador . . . . . 286
8.12. Perspectivas y extensiones . . . . . 288
8.13. Nota histórica . . . . . 289

**9. Sistemas de ecuaciones no lineales** **291**
9.1. El método de Newton para sistemas . . . . . 292
9.1.1. Coste y el jacobiano . . . . . 297
9.2. Newton modificado . . . . . 298
9.3. Iteración de punto fijo vectorial . . . . . 300
9.4. Métodos quasi-Newton: la actualización de Broyden . . . . . 301
9.5. Convergencia local rigurosa . . . . . 308
9.6. Ejercicios resueltos . . . . . 309
9.7. Ejercicios propuestos . . . . . 316
9.8. Introducción a la optimización numérica . . . . . 320
Optimización numérica: descenso de gradiente, Newton, BFGS . . 320
9.9. Prácticas con ordenador . . . . . 323
9.10. Límites del método y alternativas . . . . . 324
9.11. Nota histórica . . . . . 325

**10. Problemas de valor inicial para ecuaciones diferenciales ordinarias** **327**
10.1. El método de Euler . . . . . 328
10.1.1. Euler explícito y su análisis de error . . . . . 328
10.1.2. Euler implícito y la ecuación de prueba . . . . . 330
10.2. Métodos de Runge-Kutta . . . . . 331
10.2.1. El cuadro de Butcher . . . . . 331
10.2.2. Condiciones de orden para métodos RK explícitos . . . 333
10.2.3. El factor de amplificación de los métodos RK . . . . . 334
10.2.4. RK4: el método de cuatro etapas . . . . . 335
10.3. Métodos multipaso de Adams . . . . . 335
10.3.1. Derivación de Adams-Bashforth . . . . . 336
10.3.2. Adams-Moulton: la familia implícita . . . . . 337
10.3.3. Predictor-corrector . . . . . 337
10.4. Consistencia, orden y estabilidad de métodos multipaso . . . 339
10.5. Rigidez y los métodos BDF . . . . . 341
10.5.1. Cuantificación de la rigidez y elección de método . . . 343
10.5.2. A(alpha)-estabilidad: ángulos de los métodos BDF . . . 343
10.5.3. El sistema implícito: Newton interno y jacobiano . . . . 344
10.6. Análisis de cero-estabilidad . . . . . 345
10.6.1. Barreras de Dahlquist: primera y segunda . . . . . 346
10.6.2. Galería de regiones de estabilidad . . . . . 347
10.7. Control adaptativo del paso . . . . . 348
10.8. Ejercicios resueltos . . . . . 353

10.9. Ejercicios propuestos . . . . . 365
10.10Prácticas con ordenador . . . . . 373
10.11Perspectivas y extensiones . . . . . 374
10.12Nota histórica . . . . . 375

**11. Problemas de valor en la frontera** **377**
Motivación: problemas de valor en la frontera . . . . . 377
11.1. Existencia, unicidad y condicionamiento . . . . . 378
11.2. Tipos de condiciones de contorno . . . . . 379
11.3. El método de disparo . . . . . 380
11.4. El método de diferencias finitas . . . . . 383
11.4.1. Discretización de la derivada segunda . . . . . 383
11.4.2. El sistema tridiagonal . . . . . 384
11.4.3. Condición de Neumann por nodo ficticio . . . . . 385
11.5. El principio del máximo discreto . . . . . 387
11.6. Ejercicios resueltos . . . . . 391
11.7. Ejercicios propuestos . . . . . 398
11.8. Prácticas con ordenador . . . . . 405
11.9. Perspectivas y extensiones . . . . . 406
11.10Nota histórica . . . . . 407

**12. Discretización de ecuaciones en derivadas parciales** **409**
12.1. La ecuación de transporte . . . . . 411
12.1.1. Un primer intento: diferencias centradas en espacio . . 411
12.1.2. El esquema upwind . . . . . 412
12.1.3. El esquema de Lax-Wendroff . . . . . 414
12.2. La ecuación del calor . . . . . 417
12.2.1. El esquema FTCS y su derivación . . . . . 417
12.2.2. Los theta-esquemas y Crank-Nicolson . . . . . 418
12.3. Consistencia, estabilidad y el principio de Lax . . . . . 424
12.4. Análisis de estabilidad de von Neumann . . . . . 425
12.5. La ecuación de ondas . . . . . 427
12.6. Nodos ficticios para condiciones de contorno . . . . . 430
12.7. Ecuaciones elípticas: el método de cinco puntos . . . . . 432
12.7.1. Derivación del stencil de cinco puntos . . . . . 433
12.7.2. Estructura del sistema lineal . . . . . 433
12.7.3. Principio del máximo discreto . . . . . 434
12.7.4. Discretización de Poisson y condiciones Neumann . . 435

12.8. Convergencia cuantitativa . . . . . 439
12.8.1. La condición CFL como teorema . . . . . 439
12.9. Ejercicios resueltos . . . . . 441
12.10Ejercicios propuestos . . . . . 449
12.11Prácticas con ordenador . . . . . 459
12.12Perspectivas y extensiones . . . . . 460
12.13Nota histórica . . . . . 460

**13. Ecuaciones en diferencias finitas** **463**
13.1. Definición y clasificación . . . . . 463
13.2. Ecuaciones homogéneas: el polinomio característico . . . . . 464
13.3. Ecuaciones no homogéneas: solución particular . . . . . 466
13.3.1. Método de los coeficientes indeterminados . . . . . 466
13.3.2. Método de la función generatriz . . . . . 467
13.4. Estabilidad de las ecuaciones en diferencias . . . . . 467
13.5. Conexión con los métodos numéricos multipaso . . . . . 470
13.6. Sistemas de ecuaciones en diferencias . . . . . 471
13.7. Ejercicios resueltos . . . . . 471
13.8. Ejercicios propuestos . . . . . 476

**14. Repaso de resultados previos** **479**
A. Normas y productos escalares . . . . . 479
B. Autovalores y diagonalización . . . . . 481
C. Matrices especiales . . . . . 481
D. Resultados de cálculo en una variable . . . . . 482
E. Series de Fourier . . . . . 484
F. Transformada discreta de Fourier . . . . . 485

**15. Soluciones a los ejercicios propuestos** **487**
Capítulo 1 . . . . . 487
Capítulo 2 . . . . . 491
Capítulo 3 . . . . . 497
Capítulo 4 . . . . . 500
Capítulo 5 . . . . . 506
Capítulo 6 . . . . . 508
Capítulo 7 . . . . . 510
Capítulo 8 . . . . . 514
Capítulo 9 . . . . . 518

Capítulo 10 . . . . . 521
Capítulo 11 . . . . . 528
Capítulo 12 . . . . . 532
Capítulo 13 . . . . . 539

**16. Guía mínima de MATLAB, Octave y Python** **543**
E.1. Aritmética y representación numérica . . . . . 543
E.2. Álgebra lineal . . . . . 543
E.3. Interpolación y ajuste . . . . . 544
E.4. Integración y diferenciación numérica . . . . . 544
E.5. Ecuaciones diferenciales . . . . . 545
E.6. Gráficos . . . . . 546
E.7. Ecuaciones y sistemas no lineales . . . . . 547
E.8. Optimización numérica . . . . . 548
E.8. Métodos multipaso . . . . . 550
E.9. Referencia rápida por capítulo . . . . . 553

**Índice analítico** **555**