Índice general

1. Funciones, límites, continuidad **1**

1.1. Introducción . . . 3
1.2. Función . . . 4
1.2.1. Dominio de una función . . . 5
1.2.2. Imagen de una función . . . 8
1.2.3. Función a trozos . . . 11
1.2.4. Composición de funciones . . . 13
1.3. Función inversa . . . 14
1.4. Funciones simétricas . . . 17
1.4.1. Función par e impar . . . 17
1.5. Funciones elementales . . . 19
1.6. Límites . . . 20
1.6.1. Definición de límite . . . 20
1.6.2. Cálculo de límites . . . 24
1.7. Indeterminaciones . . . 25
1.8. Infinitésimos . . . 30
1.8.1. Propiedades de los infinitésimos . . . 31
1.8.2. Comparación de infinitésimos . . . 31
1.8.3. Infinitésimos equivalentes . . . 31
1.9. Continuidad . . . 32
1.9.1. Continuidad de una función . . . 32
1.9.2. Propiedades de las funciones continuas . . . 35
1.9.3. Continuidad por tipo de función . . . 36
1.9.4. Discontinuidad . . . 37
1.10. Asíntotas . . . 42
1.10.1. Asíntotas verticales . . . 43
1.10.2. Asíntotas horizontales . . . 45
1.10.3. Asíntotas oblicuas . . . 46
1.11. Teorema de Bolzano y otros . . . 49
1.11.1. Teorema de Bolzano . . . 49
1.11.2. Teorema de los valores intermedios . . . 50
1.11.3. Teorema de los valores extremos o de Weierstrass . . . 52
1.12. Palabras clave . . . 54
1.13. Autoevaluación . . . 55
1.14. Problemas . . . 57

2. Derivación **59**
2.1. Introducción 61
2.2. Concepto de derivada 62
2.2.1. Tasa de variación 62
2.2.2. La tasa de variación instantánea 63
2.2.3. Derivada en un punto 64
2.2.4. Interpretación geométrica 65
2.2.5. El problema de la recta tangente 65
2.3. Continuidad y derivabilidad 67
2.4. Función derivada 69
2.4.1. Método de obtención de funciones derivadas 69
2.4.2. Reglas de cálculo de derivadas 69
2.4.3. Aplicación económica 74
2.5. Regla de la cadena 78
2.6. Derivada de la función inversa 78
2.7. Derivación implícita 80
2.8. Derivación logarítmica 81
2.8.1. Derivada de la función exponencial 82
2.8.2. Derivada de la función exponencial de base $\boldsymbol{a}$ 83
2.9. Derivadas de funciones trigonométricas 84
2.10. Tabla de derivadas 88
2.11. Derivadas sucesivas 89
2.12. Análisis de funciones 90
2.12.1. Crecimiento y decrecimiento de funciones 90
2.12.2. Extremos absolutos de una función 93
2.12.3. Extremos relativos de una función. Máximos y mínimos locales 93
2.12.4. Puntos críticos o estacionarios 94
2.12.5. Algunos teoremas importantes 100
2.12.6. Concavidad y convexidad 104
2.12.7. Puntos de inflexión 105
2.13. Cálculo de límites indeterminados 108
2.13.1. Indeterminaciones 108
2.13.2. Regla de L'Hôpital 109
2.14. Análisis y representación gráfica de funciones 115
2.14.1. Decálogo para el análisis y la representación gráfica de funciones 116
2.15. Aproximación lineal y diferencial 120
2.15.1. Aproximación lineal de una función 120

2.15.2. Diferencial de una función 121
2.16. Fórmula de Taylor 122
2.16.1. Polinomio de Taylor 122
2.16.2. Teorema de Taylor 123
2.16.3. Fórmula de Maclaurin 125
2.17. Palabras clave 127
2.18. Autoevaluación 128
2.19. Problemas 130

3. Funciones de varias variables reales 133
3.1. Introducción 135
3.2. Funciones reales de dos variables reales 136
3.2.1. Dominio de una función 136
3.2.2. Álgebra de funciones de varias variables 139
3.3. Límites de funciones de dos variables 145
3.3.1. Nociones previas 145
3.3.2. Concepto de límite doble 147
3.4. Continuidad de funciones de varias variables 153
3.4.1. Continuidad de una función 153
3.4.2. Propiedades de las funciones continuas 154
3.4.3. Tipos de discontinuidad 155
3.4.4. Teorema de Bolzano-Weierstrass 157
3.5. Derivación de funciones de varias variables 157
3.5.1. Derivadas parciales 157
3.5.2. Gradiente 158
3.5.3. Interpretación geométrica 159
3.5.4. Aplicación económica 160
3.5.5. Funciones vectoriales 167
3.5.6. Derivada de la función vectorial 167
3.5.7. Matriz jacobiana 168
3.5.8. Derivadas sucesivas 169
3.6. Diferencial de una función 172
3.6.1. Diferencial total 172
3.6.2. Aplicación económica 173
3.7. Continuidad, derivabilidad y diferenciabilidad . . . 175
3.7.1. Diferenciales sucesivas 178
3.8. Funciones compuestas e implícitas 180
3.8.1. Funciones compuestas 180
3.8.2. Funciones implícitas 182

3.8.3. Aplicación económica 185
3.9. Fórmula de Taylor 188
3.10. Funciones homogéneas 191
3.10.1. Propiedades de las funciones homogéneas 191
3.10.2. Teorema de Euler 192
3.10.3. Teorema (recíproco del teorema de Euler) 194
3.10.4. Aplicaciones económicas de las funciones homogéneas 195
3.11. Palabras clave 196
3.12. Autoevaluación 197
3.13. Problemas 199

4. Optimización de funciones 201
4.1. Introducción 203
4.2. Optimización en funciones de una variable 204
4.2.1. Método para resolver problemas de optimización . . 204
4.2.2. Aplicaciones económicas 208
4.3. Optimización en varias variables sin restricciones 211
4.3.1. Extremos relativos de funciones de dos o más variables 211
4.3.2. Puntos críticos 211
4.3.3. Condición necesaria o de primer orden de extremo local 212
4.3.4. Puntos de silla 212
4.3.5. Clasificación de puntos críticos en funciones de dos variables 215
4.3.6. Clasificación de puntos críticos en funciones de más de dos variables 220
4.4. Extremos condicionados por relaciones de igualdad 227
4.4.1. Condición necesaria o de primer orden 228
4.4.2. Condición suficiente o de segundo orden 231
4.5. Interpretación económica de los multiplicadores de Lagrange 238
4.6. Palabras clave 242
4.7. Autoevaluación 243
4.8. Problemas 245

5. La integral 247
5.1. Introducción 249

5.2. Integral indefinida 250
5.2.1. La primitiva 250
5.2.2. Reglas algebraicas de integración 253
5.2.3. Reglas de integración inmediata para funciones compuestas 253
5.3. Métodos de integración 256
5.3.1. Integración por sustitución 256
5.3.2. Integración por partes 260
5.3.3. Integración de funciones racionales 266
5.4. Integral definida 269
5.4.1. El área como suma 269
5.4.2. La integral definida 271
5.4.3. Teorema fundamental del cálculo 271
5.4.4. Propiedades de la integral definida 272
5.4.5. Áreas limitadas por dos curvas 274
5.4.6. Promedio integral. Teorema del valor medio para la integral 279
5.5. Integrales impropias 281
5.5.1. Integrales impropias de primera especie 282
5.5.2. Integrales impropias de segunda especie 288
5.6. Integrales eulerianas 291
5.6.1. Función gamma 291
5.6.2. Función beta 297
5.6.3. Relación entre las funciones beta y gamma 298
5.7. Integración múltiple 302
5.8. Integral doble 303
5.8.1. Definición de integral doble 303
5.8.2. Propiedades de las integrales dobles 303
5.8.3. Integral doble sobre un rectángulo 304
5.8.4. Teorema de Fubini sobre un rectángulo 306
5.8.5. La integral doble sobre dominios generales 308
5.8.6. Área de una región plana 314
5.9. Cambio de variables 316
5.9.1. Cambio de variables a forma polar 316
5.9.2. Cambio general de variables 318
5.9.3. Valor medio para funciones de dos variables 321
5.10. Palabras clave 323
5.11. Autoevaluación 324
5.12. Problemas 326

6. Sucesiones y series 329

6.1. Introducción 331
6.2. Conceptos teóricos 332
6.2.1. Concepto de sucesión 332
6.2.2. Sucesiones monótonas 333
6.2.3. Sucesiones acotadas 335
6.3. Progresiones 335
6.3.1. Progresiones aritméticas 335
6.3.2. Progresiones geométricas 338
6.4. Límite de una sucesión 341
6.4.1. Concepto de límite 341
6.4.2. Álgebra de límites 342
6.5. Algunos criterios para el cálculo de límites 344
6.5.1. La fórmula de Stirling 344
6.5.2. Teorema de Cauchy 345
6.5.3. Criterio de Stolz 345
6.6. Series. Primeras nociones 346
6.6.1. Condición necesaria de convergencia 348
6.7. Series de términos positivos. Criterios suficientes de convergencia 350
6.7.1. Serie armónica generalizada 352
6.7.2. Criterio de Cauchy o de la raíz 352
6.7.3. Criterio de D'Alembert o del cociente 353
6.7.4. Criterio de Raabe 354
6.8. Suma de series de términos positivos 354
6.8.1. Series geométricas 355
6.8.2. Series aritmético-geométricas 355
6.8.3. Series del tipo Stirling 358
6.8.4. Series de factoriales 359
6.9. Palabras Clave 361
6.10. Autoevaluación 362
6.11. Problemas 364