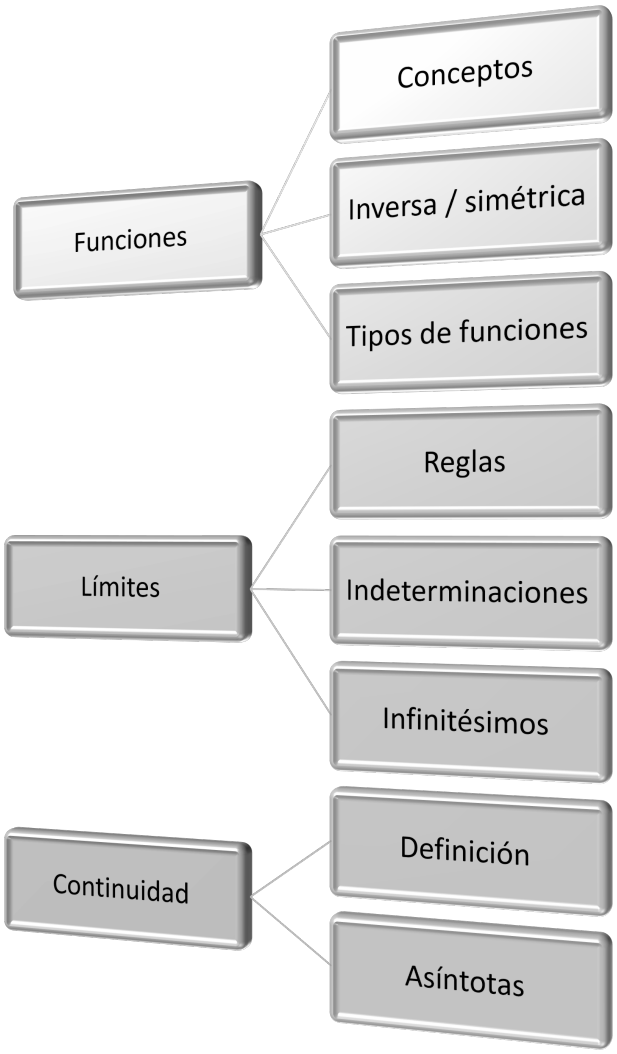
# Capítulo 1

# Funciones, límites, continuidad



## Objetivos

- Representar mediante funciones relaciones entre variables, especialmente las que aparecen en problemas económicos.
- Conocer las principales propiedades de las funciones.
- Reconocer y trabajar con funciones, funciones inversas y simétricas.
- Distinguir entre distintos tipos de funciones.
- Comprender el concepto de límite como herramienta para estudiar la tendencia y el comportamiento de una función.
- Calcular límites y resolver las indeterminaciones más habituales.
- Utilizar infinitésimos equivalentes para la resolución de límites.
- Entender y analizar la continuidad de una función.
- Determinar las asíntotas de una función e interpretar su comportamiento gráfico.
- Analizar el comportamiento de las funciones a partir de su expresión analítica y gráfica.

## 1.1. Introducción

La observación de la naturaleza y de la actividad humana permite identificar numerosos fenómenos en los que distintas magnitudes se encuentran relacionadas. La temperatura varía con el tiempo, la cantidad demandada de un bien depende de su precio y el consumo de los hogares está condicionado, entre otros factores, por su renta.

A finales del siglo XVIII un importante número de científicos y matemáticos habían determinado que una gran variedad de estos fenómenos se podía representar mediante modelos matemáticos que estaban construidos mediante relaciones o correspondencias entre las diversas magnitudes tratadas. Las matemáticas proporcionan un lenguaje preciso para describir estas relaciones, analizarlas y construir modelos que ayuden a comprender su comportamiento.

En Economía, una gran parte de estas relaciones se representa mediante funciones. Su estudio permite expresar la correspondencia entre distintas variables, determinar los valores que pueden adoptar y examinar propiedades como la simetría o la existencia de una función inversa.

Desde el siglo XX el uso de metodologías cuantitativas para la representación y estudio de teorías económicas se ha demostrado imprescindible: gráficas que representan la evolución de los precios, las demandas de los consumidores, las variaciones de las rentas, etc.

El conocimiento de las funciones elementales resulta, por tanto, imprescindible para formular e interpretar modelos económicos y para comprender sus representaciones gráficas. Cualquier estudio económico que se quiera llevar a cabo implica manejar los conceptos básicos de función, tendencia (límites), crecimiento (derivadas)... Con estas herramientas matemáticas se ha de ser capaz de representar de forma consistente los modelos de la Teoría Económica con un lenguaje matemático que facilite su estudio.

Este capítulo introduce también los conceptos de límite y continuidad. El límite permite analizar la tendencia de una función cuando la variable se aproxima a un valor determinado o crece indefinidamente. A partir de él se estudian las indeterminaciones, los infinitésimos, la continuidad y el comportamiento asintótico. Finalmente, se presentan algunos resultados fundamentales sobre funciones continuas, como el teorema de Bolzano. Estos instrumentos permitirán realizar un primer análisis global de las funciones y servirán de base para el posterior estudio de la derivación, la optimización y la integración.

## 1.2. FUNCIÓN

Se dice que una relación entre dos conjuntos $A$ y $B$ es un conjunto de **pares ordenados** de la forma $(x,y)$, donde $x \in A$ e $y \in B$. A partir de aquí se puede pensar en el concepto de función **uniforme** como una relación entre dos conjuntos $A$ y $B$ con la propiedad de que, para cada valor de $x$, existe un único valor de $y$. Es decir, una función es una regla que asigna a cada uno de los valores de $A$ un único valor de $B$.

En contraposición a las funciones uniformes están las funciones **multiformes**, que para cada valor de $A$ asignan más de un valor de $B$.

La variable $x$ se denomina **variable independiente** cuando se trabaja en términos matemáticos, y variable **exógena** cuando se trabaja con funciones económicas. Y la variable $y$ se denomina variable **dependiente** en términos matemáticos y variable **endógena** cuando se trata de funciones económicas.

Normalmente se representa la función mediante la notación $f$, y el valor que toma la función para el valor $x$ se denota como $f(x)$. Por tanto, se escribe una función **real de variable real** como

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = f(x). \end{array}$$

**Ejemplo 1.1.** Una empresa dedicada a la producción de vinos ecológicos tiene unos gastos de producción de 500 € que incluyen el alquiler del local, los salarios de los trabajadores y el pago de los servicios necesarios para un día normal de trabajo de la empresa. Por otro lado, para elaborar un litro de vino ecológico se invierte un total de 5 € por concepto de insumos o materias primas. Construye la función de coste total de la empresa en función del volumen de producción diario.

Se va a llamar $C\,(x)$ a la función que representa el coste total de la empresa.

Se sabe que la empresa tiene gastos fijos diarios de producción de 500 € y que la producción de cada litro de vino supone un coste de 5 €. Suponiendo que se producen $x$ litros de vino al día, se puede escribir la función de costes como

$$C\,(x) = costes\ fijos + costes\ variables$$

$$C\,(x) = 500 + 5x.$$

■

**Ejemplo 1.2.** Una empresa ferroviaria oferta trayectos nacionales al precio de 25 € cada trayecto. La empresa quiere aumentar los beneficios y realiza un estudio de mercado. Del estudio se desprende que por cada euro que aumente el precio del billete, la venta de billetes se reduce en se venden 500 billetes menos. La capacidad de plazas de la compañía es actualmente de 25.000 plazas. Construye las funciones de precio y cantidad de plazas vendidas.

Si se denomina $x$ al incremento en el precio del billete, se tiene que la función de precios será:

$$P(x) = 25 + x$$

Por otro lado, la función de billetes vendidos en función del incremento $x$ en el precio del billete será

$$Q(x) = 25.000 - 500x$$

■

### 1.2.1. Dominio de una función

El **dominio** de una función $f$ es el conjunto de todos los valores para los cuales la función está definida.

Dada una función $f(x)$, se denomina dominio de la función al conjunto de puntos $x \subset \mathbb{R}$, para los que existe un número real $y = f(x)$, y se denota como:

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : y = f(x)\}.$$

**Ejemplo 1.3.** Hallar el dominio de las siguientes funciones:

**a)** $f(x) = x^3$

El dominio son todos los números reales,

$$Dom(f) = \mathbb{R}.$$

**b)** $f(x) = +\sqrt{x}$

El dominio son todos los números reales positivos y el 0, valores para los que implícitamente está definida la función,

$$Dom(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}.$$

**c)** $f(x) = \sqrt{-x+5x}$,$\forall x \in \{1, 4, 16\}$

En este caso el dominio es explícito, luego

$$Dom(f) = \{1, 4, 16\}.$$

■

**Ejemplo 1.4.** Determinar el dominio de la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{(x^2-1)}}$$

Al tratarse de una raíz cuadrada, se debe cumplir que el radicando sea mayor o igual que 0

$$\frac{x-3}{(x^2-1)} \geq 0.$$

Además, como hay una fracción, se ha de cumplir que el denominador sea no nulo

$$x^2 - 1 \neq 0.$$

En estos casos es interesante hacer un estudio de los signos de la función

$$\frac{x-3}{(x^2-1)} = \frac{(x-3)}{(x-1)(x+1)}.$$

Se construye una tabla en la que aparecen por un lado los monomios y por otro los intervalos donde cambia el signo, que se obtienen a partir de los valores que anulan los monomios, $x+1$, $x-1$ y $x-3$, y que son $-1$, $+1$ y $+3$.

| | $x+1$ | $x-1$ | $x-3$ | $x-3/(x^2-1)$ |
|---|---|---|---|---|
| $(-\infty, -1)$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $(-1, 1)$ | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $(1, 3)$ | $+$ | $+$ | $-$ | $-$ |
| $(3, +\infty)$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |

El valor 3 pertenece al dominio, pues la función en ese punto puede calcularse y vale 0.

Los valores $-1$ y 1 no pertenecen al dominio, pues anulan el denominador.

Luego el dominio es

$$\text{Dom } f(x) = (-1, 1) \cup [3, +\infty).$$

■

**Ejemplo 1.5.** Determinar el dominio de la función de costes de la empresa vitivinícola que se ha construido anteriormente.

Se sabe que la función de costes es:

$$C(x) = 500 + 5x$$

Si se analiza el dominio de la función $C(x)$ desde un punto de vista matemático se puede afirmar que

$$Dom(C) = \mathbb{R}$$

Sin embargo, puesto que la variable exógena representa la cantidad de vino producida, esta debe ser positiva y por tanto en este caso el dominio será:

$$Dom(C) = \mathbb{R}^+$$

■

**Ejemplo 1.6.** Determinar el dominio de la función de precios y de la función de venta de billetes de la compañía ferroviaria.

Se sabe que la función de precios es:

$$P(x) = 25 + x$$

Por tanto, dado que solo puede haber incrementos de precio ($x \geq 0$), el dominio es:

$$Dom(P) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\},$$

pero hay que tener en cuenta que si el precio se incrementara más de 50 € no se vendería ninguna plaza, por lo tanto, se puede especificar que el dominio es:

$$Dom(P) = [0, 50].$$

Se sabe que la función de billetes vendidos es:

$$Q(x) = 25.000 - 500x$$

Y el dominio entonces va en función de la variación del precio:

$$Dom(Q) = [0, 50].$$

■

Nótese que en las funciones que representan situaciones económicas el dominio se suele ver restringido por los propios hechos económicos, unidades físicas producidas, precios de productos, cantidad de unidades vendidas, etc.

### 1.2.2. Imagen de una función

La **imagen** de una función $f$, también denominada **recorrido** o **rango** de la función, es el conjunto de valores que toma la función para cada uno de los valores de su dominio y se denota como:

$$Im(f) = \{f(x) : x \in Dom(f)\}.$$

**Ejemplo 1.7.** Hallar la imagen de las siguientes funciones:

**a)** $f(x) = x^3$

La imagen son todos los números reales,

$$Im(f) = \mathbb{R}.$$

**b)** $f(x) = +\sqrt{x}$

La imagen son todos los números reales positivos y el 0,

$$Im(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}.$$

**c)** $f(x) = -\sqrt{-x+5x}$,$\forall x \in \{1, 4, 16\}$

En este caso, el dominio de la función viene explicitado, luego la imagen son aquellos valores que devuelve la función evaluada en los valores del dominio y son:

$$Im(f) = \{-2, -4, -8\}.$$

■

**Ejemplo 1.8.** Hallar la imagen de la función de costes de la empresa dedicada a la producción de vinos ecológicos que se ha estudiando anteriormente.

La función de costes es

$$C(x) = 500 + 5x$$

Y el dominio se comprobó que era:

$$Dom(C) = \mathbb{R}^+$$

Luego la imagen son los números reales a partir de 500, suponiendo que se puede producir cualquier cantidad de vino:

$$Im(f) = (500, \infty).$$

■

**Ejemplo 1.9.** Hallar la imagen de la función de precios y de la función de venta de billetes de la compañía ferroviaria.

La función de precios es:

$$P(x) = 25 + x$$

Luego la imagen son los números reales a partir de 25, pero como el precio se puede incrementar hasta un máximo de 50 €, se tiene que la imagen es:

$$Im(P) = [25, 75].$$

La función de billetes vendidos es:

$$Q(x) = 25.000 - 500x$$

Luego la imagen está entre no vender ningún billete y venderlos todos, de acuerdo al precio establecido:

$$Im(f) = [0, 25.000].$$

■

**Ejemplo 1.10.** Se sabe que la empresa ferroviaria tiene unos costes totales de 500.000 €. Construir una función que permita calcular los beneficios en cada momento de acuerdo al incremento aplicado.

En este caso la función de beneficios se obtiene como la diferencia entre las funciones de ingresos y gastos.

La función de ingresos se construye multiplicando el precio, $P$, de cada billete por la cantidad, $Q$, de billetes vendidos:

$$I(x) = P(x)\,Q(x) = (25 + x)\,(25.000 - 500x),$$

la función de gastos, en este caso particular, es una función constante:

$$G(x) = 500.000,$$

con esta información se puede construir la función de beneficios solicitada:

$$B(x) = I(x) - G(x) = (25 + x)\,(25.000 - 500x) - 500.000$$

que operando se transforma en la siguiente función de segundo grado:

$$B(x) = -500x^2 + 12.500x + 125.000$$

■

**Ejemplo 1.11.** Calcular los beneficios que está obteniendo la empresa ferroviaria en el momento actual antes de incrementar el precio.

La función de beneficios es:

$$B(x) = -500x^2 + 12.500x + 125.000,$$

y si no se incrementa el precio, quiere decir que $x = 0$, luego:

$$B(0) = -500 \cdot 0^2 + 12.500 \cdot 0 + 125.000 = 125.000,$$

que coincide con la venta del total de plazas disponibles, 25.000, por el precio inicial, 25 €, menos los costes.

■

**Ejemplo 1.12.** Calcular el incremento para el que se obtendría el máximo beneficio para la compañía ferroviaria, especificar los beneficios máximos y el número de billetes vendidos en ese caso.

Para determinar en qué valor se obtiene el máximo de la función de beneficios, se analiza la función de segundo grado, es decir, una parábola de la forma $y = ax^2 + bx + c$.

Como en este caso $a = -500 < 0$, se sabe que las ramas de la parábola van hacia abajo, por lo que la función alcanza el máximo en el vértice:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-12.500}{2(-500)} = 12{,}5.$$

Luego el beneficio máximo se obtiene con un incremento del precio del billete de 12,50 €, y los beneficios ascienden a:

$$B(12{,}5) = -500 \cdot 12{,}5 + 12.500 \cdot 12{,}5 + 125.000 = 203.125.$$

En este caso el precio del billete sería:

$$P(12{,}5) = 25 + 12{,}5 = 37{,}5.$$

Y el número de billetes vendidos es:

$$Q(12{,}5) = 25.000 - 500 \cdot 12{,}5 = 18.750.$$

■